



Actuarieel Genootschap

# BIJLAGE

bij Prognosetafel AG2012-2062



---

# BIJLAGE

## Sluiten van de periodetafel GBM/V 2005-2010.

Katrien Antonio

23 juli 2012

---

### 1 Probleemstelling

**Sluiten van een periodetafel.** De waargenomen sterftekansen op zeer hoge leeftijden zijn volatiel omwille van een beperkte exposure op dergelijke leeftijden. Indien deze sterftekansen onverkort worden toegepast, werkt deze volatiliteit door in de berekeningen van bijv. een levensverwachting of de contante waarde van een lijfrente. Om de grote volatiliteit op hoge leeftijden te omzeilen, wordt de sterftetafel (voorafgaand aan dergelijke berekeningen) 'gesloten'. Hierbij worden de sterftekansen  $q_x(t)$  (in een zeker jaar  $t$ ) vervangen door  $q_x^{sl}(t)$  (voor  $x > x_{old}$ , met 'sl' van sluiten). Diverse technieken om de tafel te sluiten zijn voorgesteld in de wetenschappelijke literatuur. Hierbij wordt veelal een parametrische of niet-parametrische functie geschat op een interval, zeg  $[x_{start}, x_{old}]$ , en vervolgens geëxtrapoleerd naar de leeftijden  $x_{old} + 1$  en hoger.

**Opzet van het onderzoek.** Deze nota bekijkt het sluiten van een periodetafel aan de hand van volgende technieken uit de literatuur: Denuit and Goderniaux (2005), Lindbergson (2001), Kannistö (1992) en Coale and Kisker (1990). Via een vergelijkend overzicht gaan we op zoek naar een zinvolle manier om de periodetafel GBM/V 2005-2010 te sluiten. We schatten de eerder genoemde technieken om te sluiten via *least squares* of *maximum likelihood* op een interval van kansen  $q_x$  of sterfte-intensiteiten  $\mu_x$ . We merken op dat we in dit onderzoek de **afgeronde**  $q_x$  gebruiken (zoals bepaald via het Van Broekhoven ([VB]) algoritme). Hieruit vinden we  $\mu_x$  via de relatie:  $\mu_x = -\log(1 - q_x)$ . We vergelijken de sterftewetten op basis van: *goodness-of-fit* (grafisch en kwantitatief) met betrekking tot de beschikbare  $q_x$  en  $\mu_x$ , robuustheid en gebruiksvriendelijkheid. Op basis van dit onderzoek besluiten we in Sectie 9.4 hoe de periodetafel GBM/V 2005-2010 gesloten zal worden.

**Gebruik bij periodetafel.** De resulterende technische specificaties voor het verkrijgen van de periodetafel GBM/V 2005-2010 zijn weergegeven in Sectie 10.

### 2 Beschrijving van de methoden

#### 2.1 Methode van Denuit and Goderniaux (2005)

Startpunt van de methode van Denuit and Goderniaux (2005) is het empirisch waargenomen verloop van de  $q_x(t)$  op hoge leeftijden. Voor dit verloop wordt de exponentiële van een kwadratische functie voorgesteld.

Op het interval  $[x_{start}, x_{old}]$  wordt volgende parametrische functie geschat:

$$\ln q_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \epsilon_{xt}, \quad \epsilon_{xt} \sim N(0, \sigma^2), \quad (1)$$

en volgende beperkingen worden opgelegd:

$$\begin{aligned} q_\omega(t) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} q_x(t) \Big|_{x=\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

De originele methode van Denuit and Goderniaux (2005) gebruikt  $\omega = 130$ . De optimale waarde van deze ultieme leeftijd zal in deze nota onderzocht worden op basis van een goodness-of-fit criterium.

Het implementeren van de beperkingen in (2) leidt tot volgend parametrisch model voor  $\ln q_x(t)$ :

$$\ln q_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \epsilon_{xt} = c_t (\omega - x)^2 + \epsilon_{xt}. \quad (3)$$

Deze regressie wordt geschat op het interval  $[x_{\text{start}}, x_{\text{old}}]$  en vervolgens wordt  $\hat{q}_x(t) = \exp(\hat{c}_t(\omega - x)^2)$  gebruikt in plaats van de waargenomen  $q_x(t)$  vanaf leeftijd  $x_{\text{old}} + 1$ .

In deze nota wordt de optimale waarde van  $x_{\text{start}}$ ,  $x_{\text{old}}$  en  $\omega$  onderzocht.

## 2.2 Aangepaste methode van Denuit and Goderniaux (2005): suggestie van COS

We onderzoeken de suggestie van de COS en bekijken een aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005). Hierbij wijzigen we de eisen opgelegd in (2) als volgt:

$$\begin{aligned} q_\omega(t) &= z_t \\ \frac{\partial}{\partial x} q_x(t) \Big|_{x=\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Hierbij is  $z_t \in [0, 1]$  een te schatten parameter, die niet noodzakelijk gelijk is aan 1 (zoals bij het originele werk van Denuit and Goderniaux (2005)). Via deze voorwaarden wordt de regressievergelijking in (3) herschreven tot:

$$\ln q_x(t) = d_t + c_t (\omega - x)^2 + \epsilon_{xt}, \quad (5)$$

waarbij  $z_t = \exp(d_t)$ . Deze regressie (met intercept!) wordt geschat op het interval  $[x_{\text{start}}, x_{\text{old}}]$  en vervolgens wordt  $\hat{q}_x(t) = \exp(\hat{d}_t + \hat{c}_t(\omega - x)^2)$  gebruikt in plaats van de waargenomen  $q_x(t)$  vanaf leeftijd  $x_{\text{old}} + 1$ .

## 2.3 Methode van Lindbergson (2001)

Op basis van een analyse van Zweedse sterftedata stelt Lindbergson (2001) de volgende sterftewet voor:

$$\mu_x^{x^*} = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 \theta_3^x & x \leq x^* \\ \theta_1 + \theta_2 \theta_3^{x^*} + \theta_4 (x - x^*) & x > x^*. \end{cases} \quad (6)$$

Voor een vastgelegde  $x^*$  worden de parameters  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  en  $\theta_4$  bepaald door het minimaliseren van

$$K(x^*) = \sum_x \frac{\lambda_x (\mu_x - \hat{\mu}_x^{x^*})^2}{\mu_x}, \quad (7)$$

waarbij we de geobserveerde  $\mu_x$  gebruiken (i.e. bepaald op basis van VB afgeronde  $q_x$ ). We bepalen  $x^*$  als

$$x^* = \arg \min_x K^{(x)}. \quad (8)$$

De keuze van het leeftijdsinterval waarop deze sterftewet geschat wordt, zal verderop besproken worden. We merken op dat – naast het originele criterium van Lindbergson – het schatten van de onbekende parameters via maximum likelihood (zoals in Vylder (1975), zie (13)) eveneens onderzocht zal worden.

#### 2.4 Gebruik van logistische sterftewet op hoge leeftijden: Vaupel (1990) en Kannistö (1992)

Bij deze methode wordt een (variant van) een logistische sterftewet geschat. Vaupel (1990) specificeert

$$\mu_x = \frac{\phi_1 \exp(\phi_2 x)}{1 + \phi_3 \exp(\phi_2 x)}, \quad (9)$$

en de variant van Kannistö (1992) is

$$\mu_x = \frac{\phi_1 \exp(\phi_2 x)}{1 + \phi_1 \exp(\phi_2 x)}. \quad (10)$$

Deze specificaties voor  $\mu_x$  impliceren

$${}_t p_x = \left( \frac{1 + \phi_3 \exp(\phi_2 x)}{1 + \phi_3 \exp(\phi_2(x+t))} \right)^{\frac{\phi_1}{\phi_3 \phi_2}} \quad (\text{Vaupel}) \quad (11)$$

$${}_t p_x = \left( \frac{1 + \phi_1 \exp(\phi_2 x)}{1 + \phi_1 \exp(\phi_2(x+t))} \right)^{1/\phi_2} \quad (\text{Kannistö}). \quad (12)$$

Vervolgens hanteren we zowel het minimaliseren van het criterium van Lindbergson (2001) als de methode van Vylder (1975) om de onbekende parameters in (9) en (10) te schatten. Bij Vylder (1975) is  $\mathcal{D}_x \sim \text{Bin}(\lambda_x, q_x)$ . Dit resulteert in het maximaliseren van volgende log-likelihood:

$$\sum_x ((\lambda_x - \delta_x) \ln(p_x) + \delta_x \ln(q_x)). \quad (13)$$

Doray (2008) laat zien dat de parameters  $\phi_1$  en  $\phi_2$  bij Kannistö (1992) eveneens bepaald kunnen worden via OLS

$$\text{logit}(\mu_x) = \log(\phi_1) + \phi_2 x. \quad (14)$$

Het voordeel van deze implementatie is dat dit eenvoudig geïmplementeerd kan worden in een spreadsheet.

De keuze van het leeftijdsinterval waarop deze sterftewet geschat wordt, zal verderop besproken worden.

## 2.5 Methode van Coale and Kisker (1990)

We gebruiken in deze nota de originele specificatie van de methode van Coale and Kisker (1990). Hierbij wordt  $\hat{\mu}_{110} = 1$  (voor mannen) en  $\hat{\mu}_{110} = 0.8$  (voor vrouwen). Uitwerken van hun specificaties leidt tot:

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} \exp(k_{80} + s(x - 80)) \quad x \geq 80, \quad (15)$$

met

$$k_{80} = \frac{\log\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{15}, \quad (16)$$

$$s = -\frac{\log\left(\frac{\hat{\mu}_{79}}{\hat{\mu}_{110}}\right) + 31k_{80}}{465}. \quad (17)$$

Er is geen verder onderzoek uitgevoerd naar aanpassingen van deze methode.

## 3 Data: periodetafel GBM/V 2005-2010

De originele data zoals aangeleverd door het CBS en de glad gestreken data (via het Van Broekhoven algoritme) zijn voorgesteld in Figuur 1 (mannen: links en vrouwen: rechts). Merk op dat voor mannen (bruikbare) waargenomen sterftekansen beschikbaar zijn tot en met leeftijd 108 en voor vrouwen tot en met leeftijd 112.

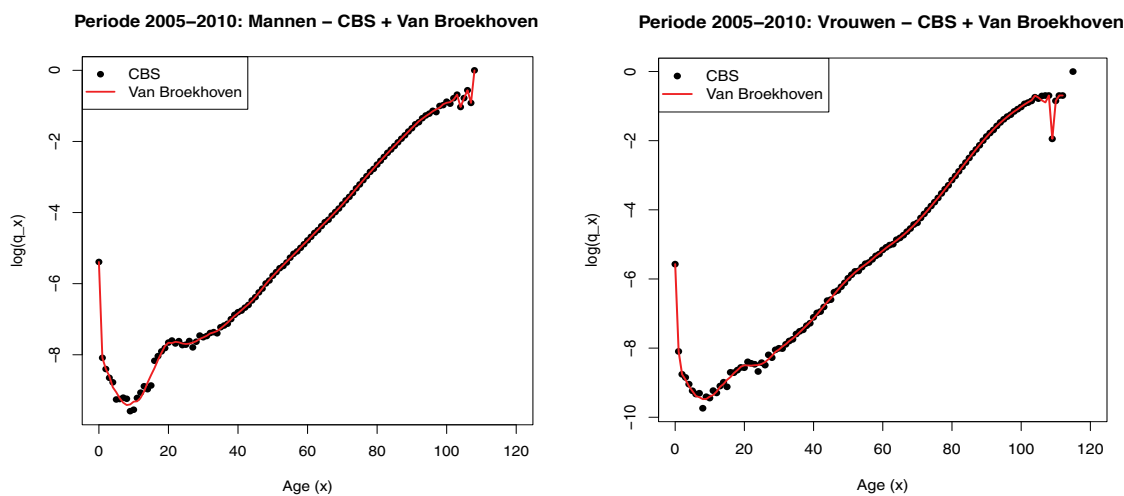


Figure 1: GBM/V 2005-2010: mannen (links) en vrouwen (rechts), niet gesloten.

Een detail van het verloop van de ruwe  $q_x$  op hoge leeftijden wordt voorgesteld in Figuur 2.

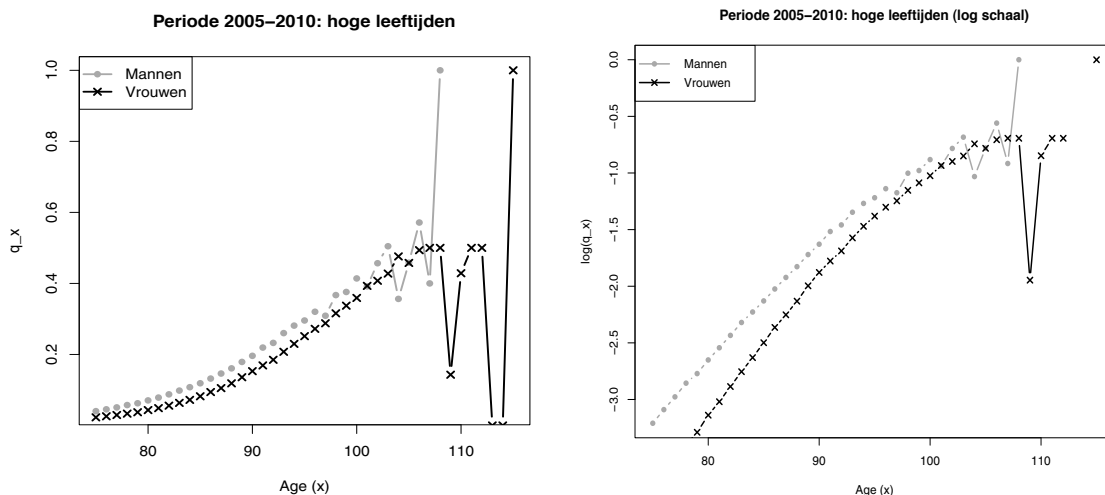


Figure 2: GBM/V 2005-2010: ruwe CBS data mannen en vrouwen:  $q_x$  en  $\log(q_x)$ .

## 4 Resultaten originele methode van Denuit and Goderniaux (2005)

### 4.1 Keuze van $x_{start}$ , $x_{old}$ en $\omega$

#### 4.1.1 Vaste $x_{old}$ : de hoogste waargenomen leeftijd

In eerste instantie wordt de parametrische functie in (3) geschat op  $[x_{start}, 108]$  voor de mannen en  $[x_{start}, 112]$  voor de vrouwen. Met andere woorden:  $x_{old}$  wordt vastgelegd op de hoogste leeftijd waarvoor (bruikbare) ruwe data beschikbaar zijn. Met deze waarde van  $x_{old}$  wordt de optimale waarde van  $x_{start}$  en  $\omega$  bepaald door beide te laten variëren over een rooster. Met name varieert  $\omega$  van 121 tot en met 140 (stapgrootte=1), en  $x_{start}$  van 75 tot en met 95 (stapgrootte=1). Vervolgens wordt de Mean Squared Error (MSE) en de RSquared (RSq) van de fit van (3) over het interval  $[x_{start}, x_{old}]$  geoptimaliseerd.

**Mannen** Voor mannen vinden we volgende optimale waarden voor  $x_{start}$  en  $\omega$  op basis van MSE:

```
> g$x1MaleMSE
[1] 75
> g$omegaMaleMSE
[1] 128
```

Via maximaliseren van RSq worden zeer vergelijkbare optimale waarden verkregen:

```
> g$x1MaleRsqr
[1] 75
> g$omegaMaleRsqr
[1] 129
```

Figuur 3 laat zien dat de geschatte functie (met optimale waarden op basis van MSE) zeer goed aansluit bij de waargenomen data.

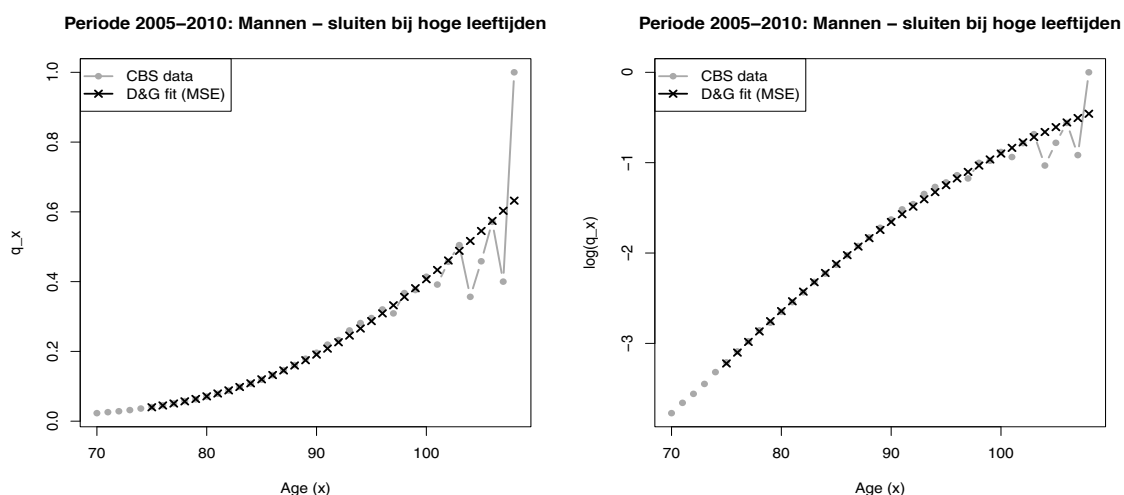


Figure 3: GBM/V 2005-2010: mannen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005) en vaste  $x_{old}$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts). De zwarte lijn is de parametrische functie uit (3) op  $[x_{start}, x_{old}]$ .

**Vrouwen** Omwille van de volatiliteit in  $q_x$  op zeer hoge leeftijden, blijkt de parametrische functie geschat op de vrouwelijke sterftেকansen sterk afhankelijk van de gebruikte  $x_{old}$ . Dit wordt geschetst in Figuur 4.

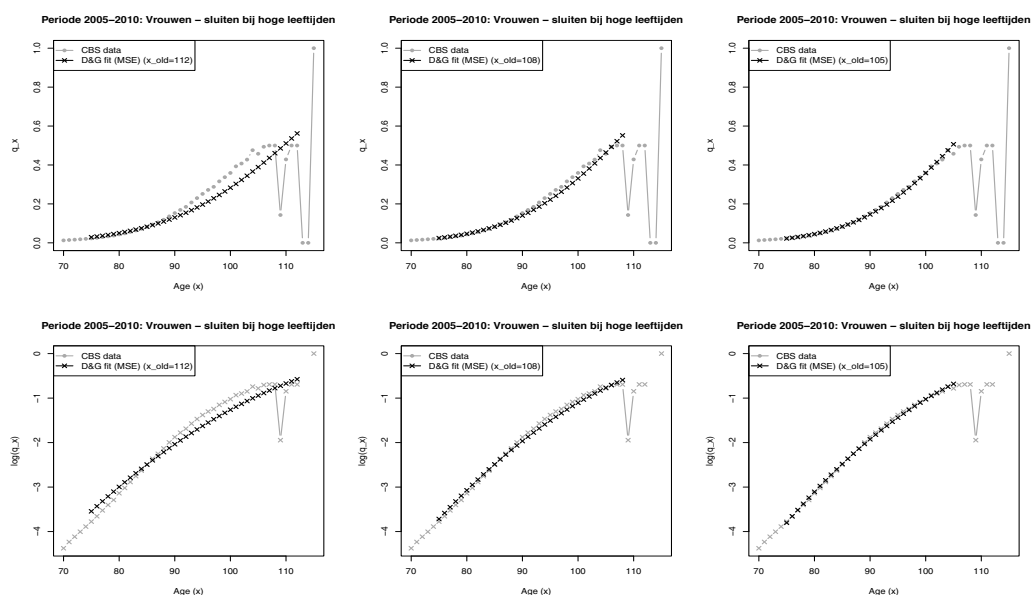


Figure 4: GBM/V 2005-2010: vrouwen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005) en vaste  $x_{old}$  (van links naar rechts: 112, 108 en 105):  $q_x$  (bovenste rij) en  $\log(q_x)$  (onderste rij).

---

**Gewogen regressie en gewogen MSE** Om de voorgestelde parametrische functie robuuster te schatten op de geobserveerde  $q_x$ , onderzoeken we het gebruik van een gewogen regressie in (3), in combinatie met het minimaliseren van een gewogen MSE (om  $x_{\text{start}}$  en  $\omega$  te bepalen). Wat betreft de keuze van de gewichten wordt enerzijds het gebruik van de 'exposure' op leeftijd  $x$  en anderzijds het verwachte aantal overlijdens op leeftijd  $x$  onderzocht. Optimale waarden voor  $x_{\text{start}}$  en  $\omega$  zijn als volgt:

(mannen - met exposure als gewichten)

```
> x1MaleMSE
[1] 75
> omegaMaleMSE
[1] 127
```

(mannen - met verwacht aantal overlijdens als gewichten)

```
> x1MaleMSE
[1] 75
> omegaMaleMSE
[1] 127
```

De resulterende functies, geschat via gewogen regressie, zijn weergegeven in Figuur 5. Analoge resultaten voor vrouwen zijn gegeven in Figuur 6. Vastgesteld kan worden dat - via het gebruik van gewogen regressie - de functie in (3) veel robuuster geschat wordt. De optimale waarden voor  $x_{\text{start}}$  en  $\omega$  worden gegeven door:

(vrouwen - met exposure als gewichten)

```
> x1FemMSE
[1] 77
> omegaFemMSE
[1] 125
```

(vrouwen - met verwacht aantal overlijdens als gewichten)

```
> x1FemMSE
[1] 75
> omegaFemMSE
[1] 126
```

#### 4.1.2 Optimalisatie over $x_{\text{start}}$ , $x_{\text{old}}$ en $\omega$

In deze sectie onderzoeken we de keuze van zowel  $x_{\text{start}}$ ,  $x_{\text{old}}$  als  $\omega$ . Hierbij laten we  $x_{\text{start}}$  variëren van 75 tot en met 89,  $x_{\text{old}}$  van 94 tot en met 108 (mannen) en 94 tot en met 112 (voor vrouwen) en  $\omega$  van 121 tot en met 140. Gewogen regressie met de verwachte aantallen overlijdens als wegingsfactor wordt gebruikt om (3) te schatten. Een gewogen MSE criterium, op het interval  $[x_{\text{start}}, x_{\text{old}}]$ , wordt geminimaliseerd om de keuze van  $x_{\text{start}}$ ,  $x_{\text{old}}$  en  $\omega$  te bepalen. Via deze strategie worden onderstaande optimale waarden verkregen. De resulterende fit wordt geïllustreerd in Figuur 7 en 8.



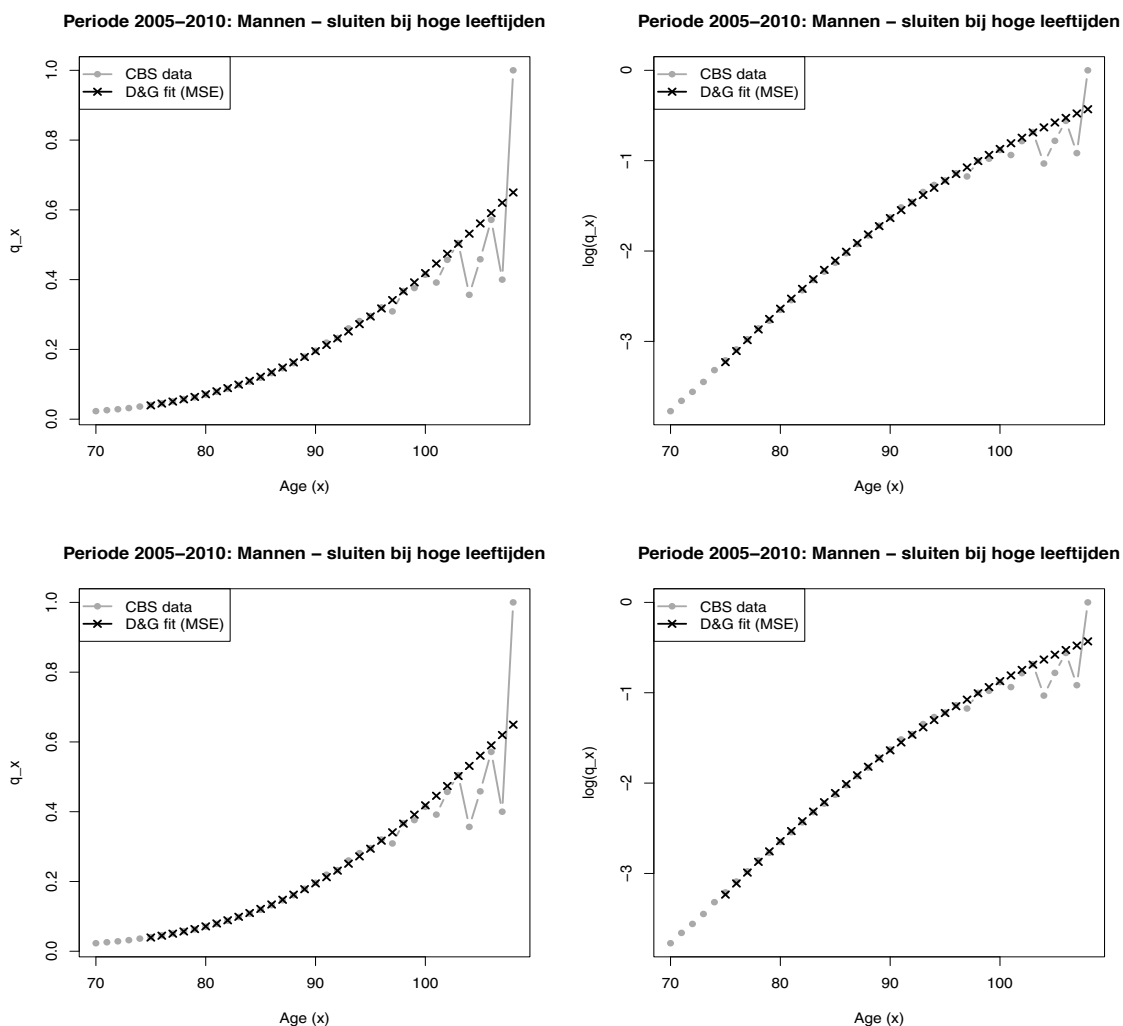


Figure 5: GBM/V 2005-2010: mannen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005) en vaste  $x_{old}$  (met name: 108): gebruik van gewogen regressie en gewogen MSE. Bovenste rij gebruikt 'exposure' als gewicht, onderste rij gebruikt het verwachte aantal overlijdens als gewicht.

```

> x1MaleMSE           > x1FemMSE
[1] 84                 [1] 81
> x2MaleMSE           > x2FemMSE
[1] 94                 [1] 94
> omegaMaleMSE        > omegaFemMSE
[1] 125                [1] 124
> x1MaleRsqr          > x1FemRsqr
[1] 85                 [1] 88
> x2MaleRsqr          > x2FemRsqr
[1] 94                 [1] 94
> omegaMaleRsqr       > omegaFemRsqr

```

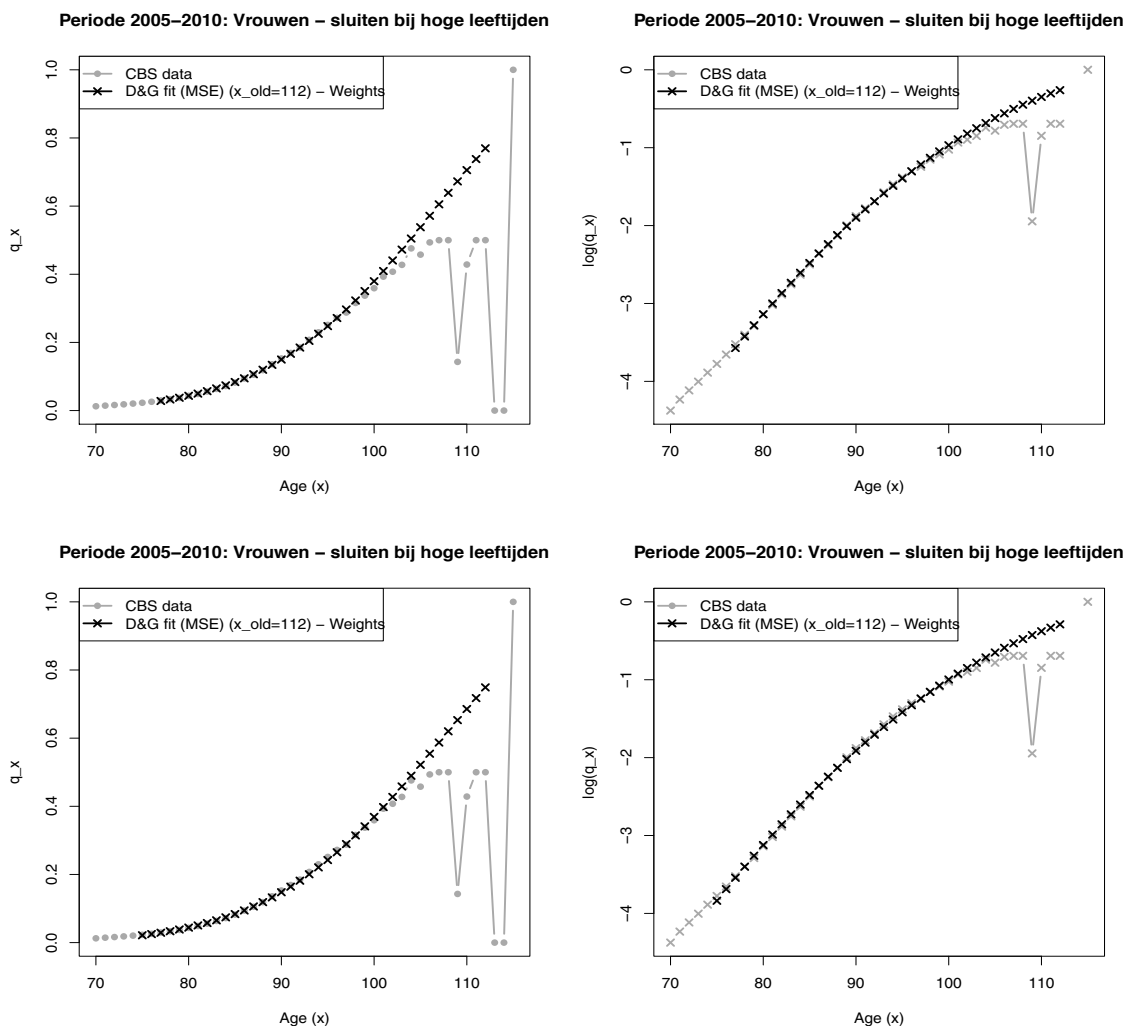


Figure 6: GBM/V 2005-2010: vrouwen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005) en vaste  $x_{old}$  (met name: 112): gebruik van gewogen regressie en gewogen MSE. Bovenste rij gebruikt 'exposure' als gewicht, onderste rij gebruikt het verwachte aantal overlijdens als gewicht.

[1] 125

[1] 124

### 4.1.3 Vergelijking aanpak sectie 4.1.1 en 4.1.2

Figuren 9 en 10 vergelijken de aanpak in sectie 4.1.1, met die van sectie 4.1.2. We gebruiken telkens een gewogen regressie met het verwachte aantal overlijdens op leeftijd  $x$  als wegingsfactor.

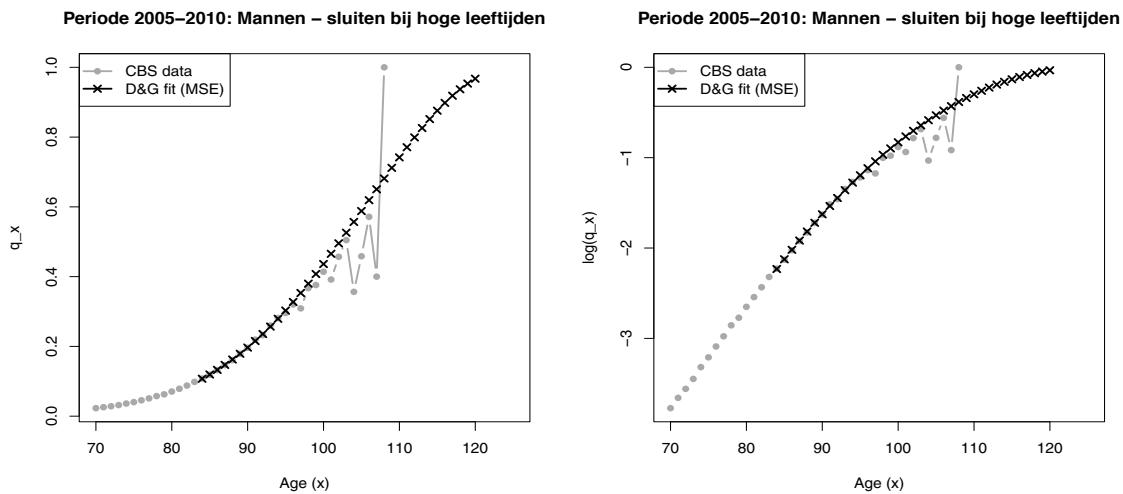


Figure 7: GBM/V 2005-2010: mannen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005), optimalisatie over  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

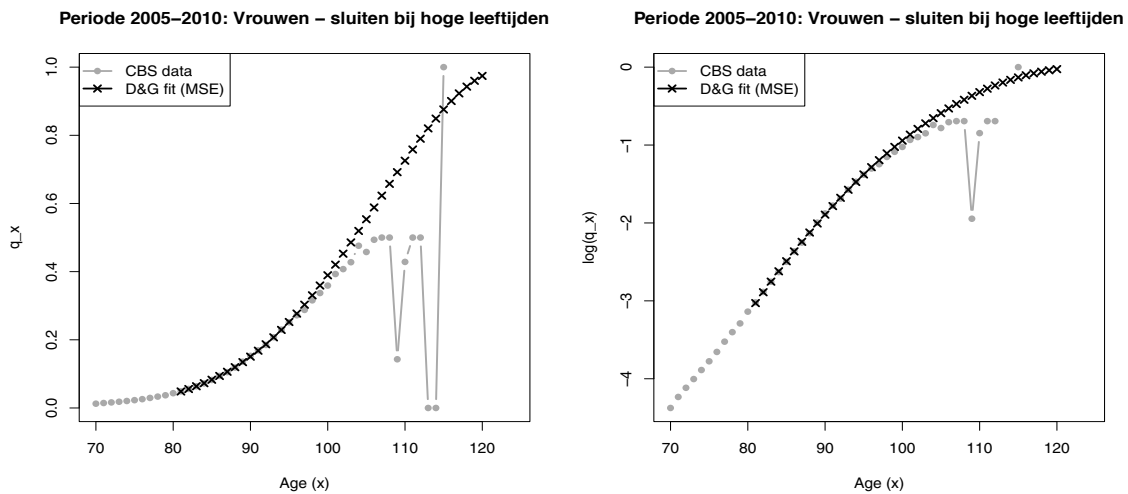


Figure 8: GBM/V 2005-2010: vrouwen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005), optimalisatie over  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

## 4.2 Gesloten tafel

**Met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$**  De gesloten periodetafels zijn geschetst in Figuur 11 (mannen: links, en vrouwen: rechts). Hierbij zijn de optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$  op basis van het MSE criterium gebruikt. Figuren 12 en Figuren 13 tonen in detail het verloop van  $q_x$  op hoge leeftijden. Het sluiten van de periodetafel op basis van Denuit and Goderniaux (2005) wordt hierbij telkens vergeleken met de techniek van sluiten voorgesteld door Van Broekhoven.

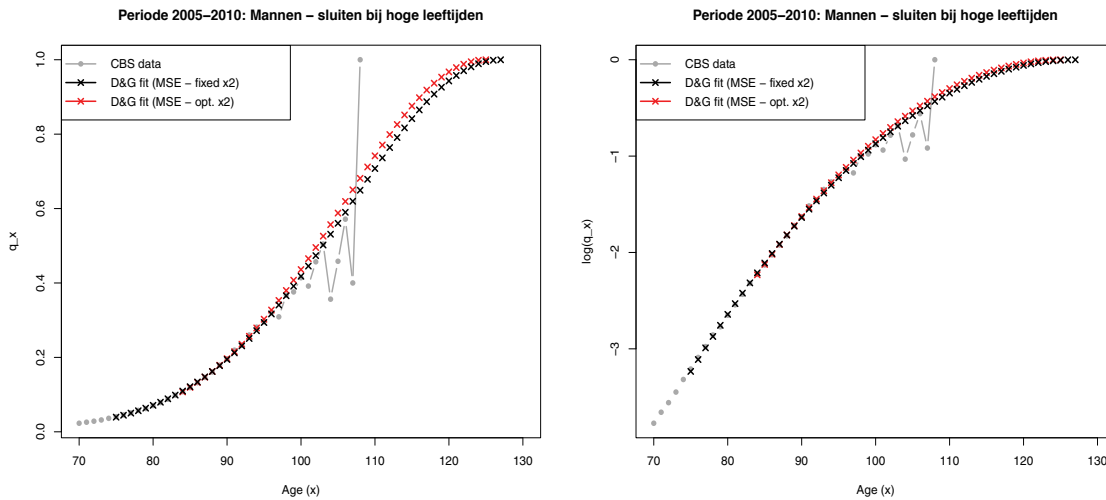


Figure 9: GBM/V 2005-2010: mannen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005) met vaste  $x_2$  zoals in sectie 4.1.1 en optimale  $x_2$  zoals in sectie 4.1.2:  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

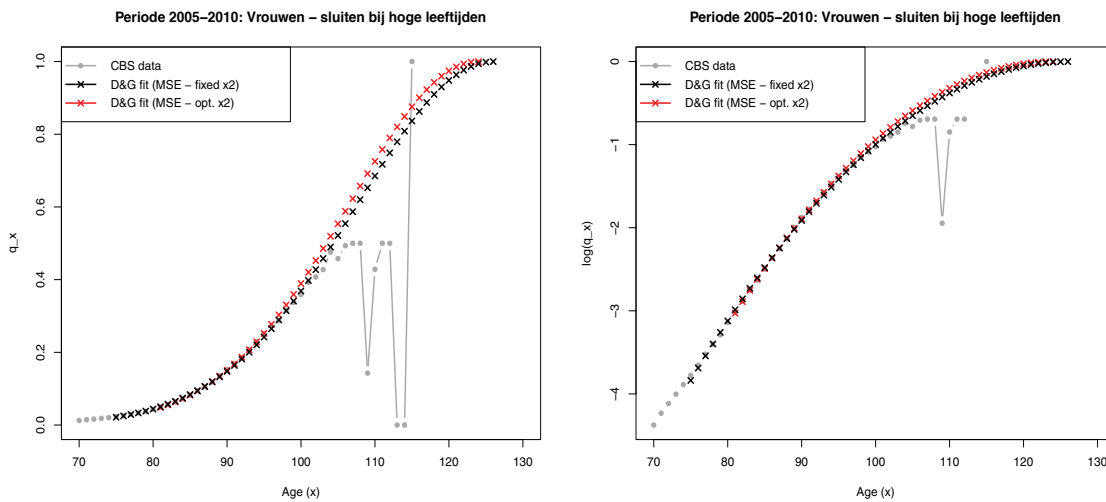


Figure 10: GBM/V 2005-2010: vrouwen - gesloten met Denuit and Goderniaux (2005) met vaste  $x_2$  zoals in sectie 4.1.1 en optimale  $x_2$  zoals in sectie 4.1.2:  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

### 4.3 Levensverwachting

Figuur 14 toont het verloop van de resterende levensverwachting op leeftijd  $x$ . Hierbij is enerzijds gebruik gemaakt van de tafel gesloten volgens Denuit and Goderniaux (2005) (met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ ) en het afsluiten volgens Van Broekhoven anderzijds. Figuur 15 geeft het detail van de resterende levensverwachting voor hoge leeftijden.



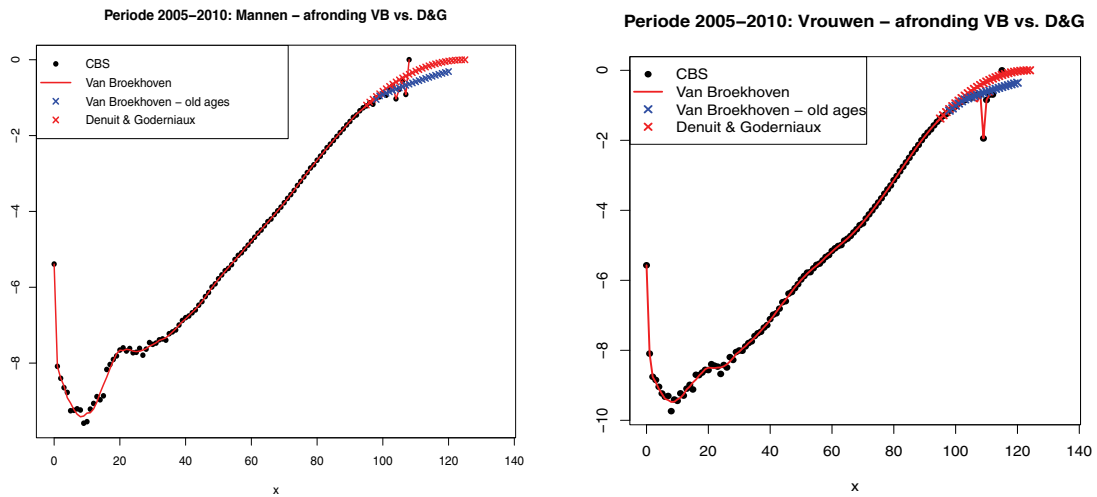


Figure 11: GBM/V 2005-2010: mannen (links) en vrouwen (rechts), gesloten tafel op basis van Denuit and Goderniaux (2005) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ , en afsluiten volgens Van Broekhoven.

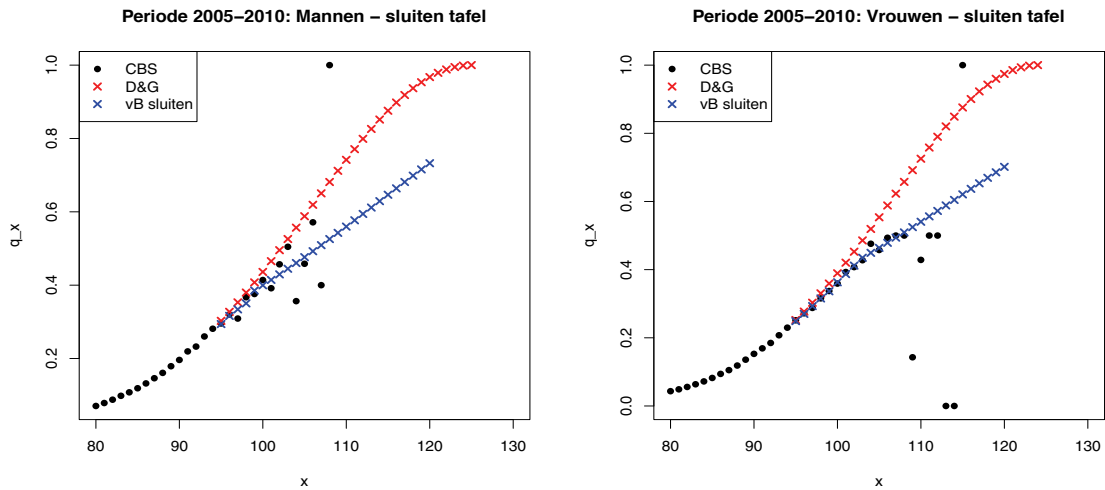


Figure 12: GBM/V 2005-2010: mannen (links) en vrouwen (rechts), gesloten tafel op basis van Denuit and Goderniaux (2005) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ , en afsluiten volgens Van Broekhoven - detail.

## 5 Resultaten aangepaste methode van Denuit and Goderniaux (2005)

We onderzoeken het sluiten van de periodetafel aan de hand van een aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005), zoals beschreven in sectie 2.2. We fitten de regressie (met intercept) in (5) op het interval  $[x_{start}, 108]$  (mannen) en  $[x_{start}, 112]$  (vrouwen). We hanteren opnieuw een gewogen regressie met het verwachte aantal overlijdens op elke leeftijd als gewicht. We kiezen een optimale  $x_{start}$  en  $\omega$  (bij vaste  $x_{old}$ ) zoals beschreven in Sectie 4.1.1

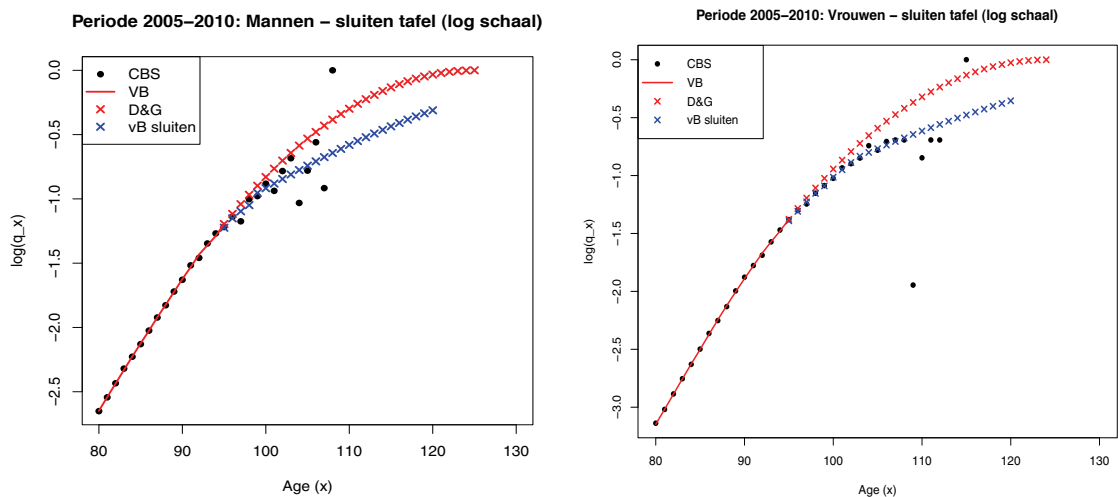


Figure 13: GBM/V 2005-2010: mannen (links) en vrouwen (rechts), gesloten tafel op basis van Denuit and Goderniaux (2005) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ , en afsluiten volgens Van Broekhoven - detail.

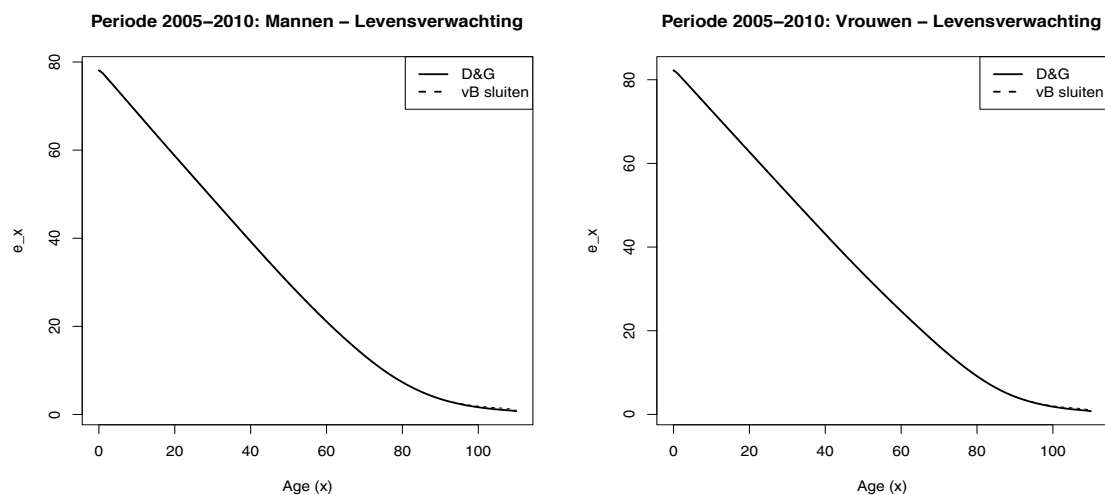


Figure 14: GBM/V 2005-2010: levensverwachting mannen (links) en vrouwen (rechts), gesloten tafel op basis van Denuit and Goderniaux (2005) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ , en afsluiten volgens Van Broekhoven.

voor de originele Denuit and Goderniaux (2005). De bijhorende optimale parameters zijn:

```
> x1MaleMSE
[1] 75
> x2MaleMSE
[1] 108
```

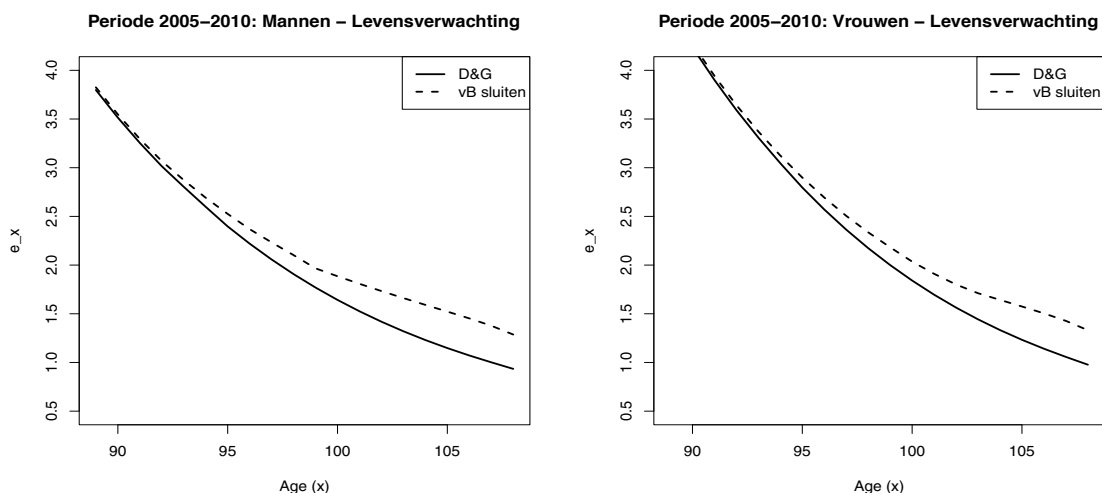


Figure 15: *GBM/V 2005-2010: levensverwachting op hoge leeftijden mannen (links) en vrouwen (rechts), gesloten tafel op basis van Denuit and Goderniaux (2005) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ , en afsluiten volgens Van Broekhoven..*

```
> omegaMaleMSE
[1] 121
Coefficients: (mannen)
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.805e-01  1.144e-02  -24.51  <2e-16 ***
cov          -1.411e-03  8.185e-06 -172.40  <2e-16 ***

> x1FemMSE
[1] 77
> x2FemMSE
[1] 112
> omegaFemMSE
[1] 121

Coefficients: (vrouwen)
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.360e-01  1.188e-02  -19.87  <2e-16 ***
cov          -1.730e-03  9.216e-06 -187.74  <2e-16 ***
```

Dit resulteert in  $\hat{z}_{man} = 0.755$  en  $\hat{z}_{vrouw} = 0.790$ . Een vergelijking tussen de resultaten op basis van Denuit and Goderniaux (2005) (met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ , zoals in Sectie 4.1.1) en de aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005) is weergegeven in Figuur 16 (mannen) en 17 (vrouwen).

Analoog aan de aanpak voorgesteld in Sectie 4.1.2 onderzoeken we het bepalen van een optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$  voor het model van Denuit and Goderniaux (2005) met intercept. Figuur 18 toont de resultaten van een gewogen regressie (met intercept) waarbij

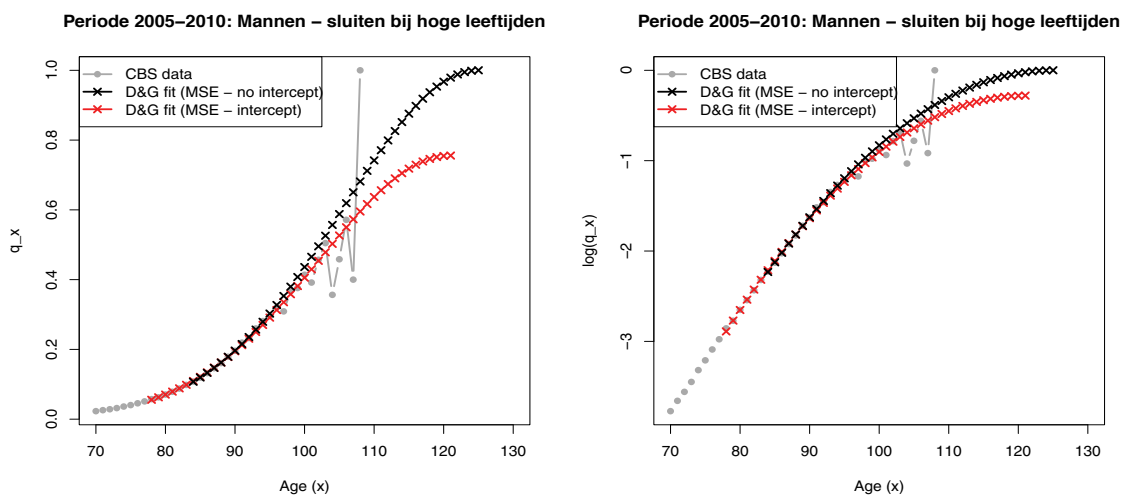


Figure 16: GBM/V 2005-2010: mannen, gesloten tafel op basis van aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005) (met intercept) met optimale  $x_{start}$  en  $\omega$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

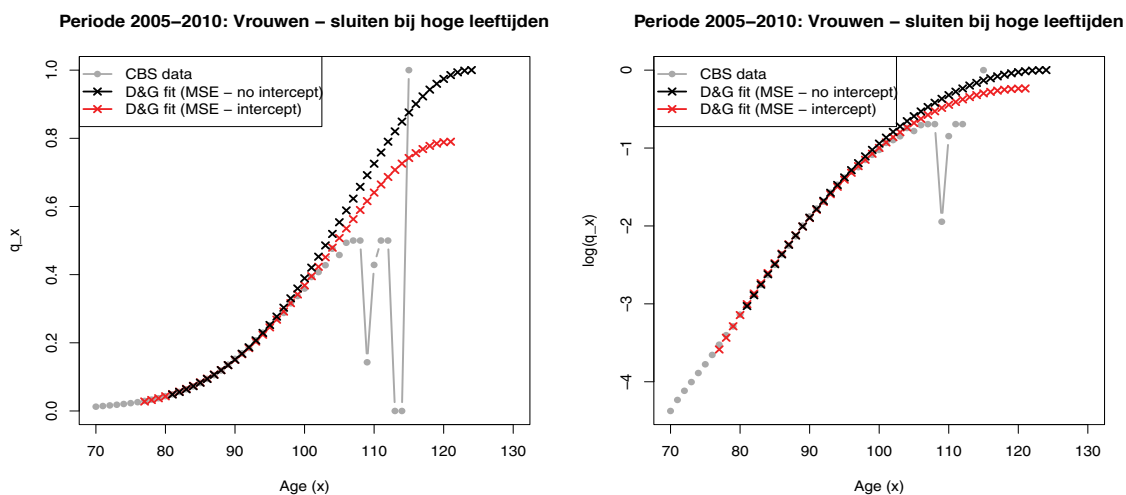


Figure 17: GBM/V 2005-2010: vrouwen, gesloten tafel op basis van aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005) (met intercept) met optimale  $x_{start}$  en  $\omega$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

geen beperkingen worden gelegd op het te schatten intercept. Voor de mannen resulteert dit in sterftekansen die boven 1 uitkomen. Dit kan verholpen worden door een beperking te leggen op het intercept, maar wordt in deze nota niet verder onderzocht.



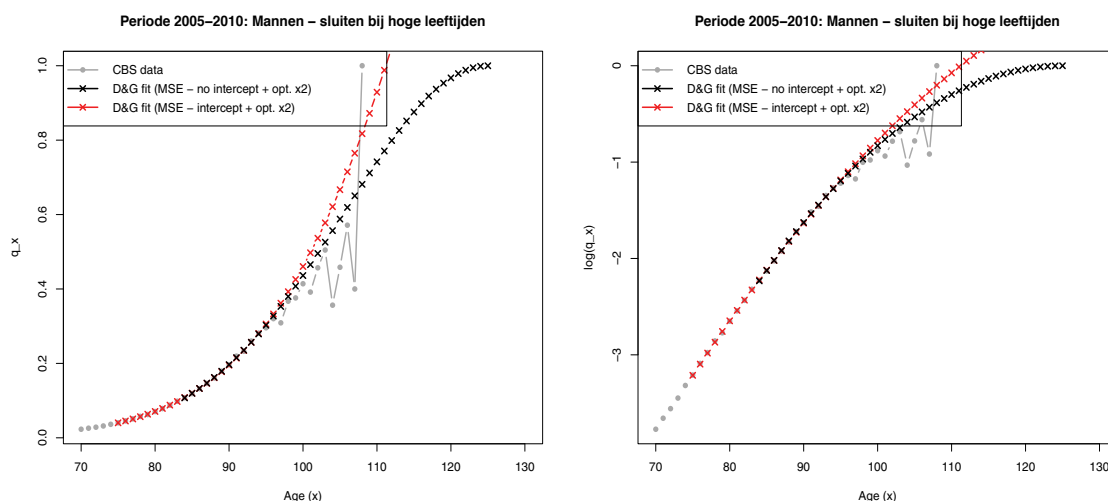


Figure 18: GBM/V 2005-2010: mannen, gesloten tafel op basis van aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005) (met intercept) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

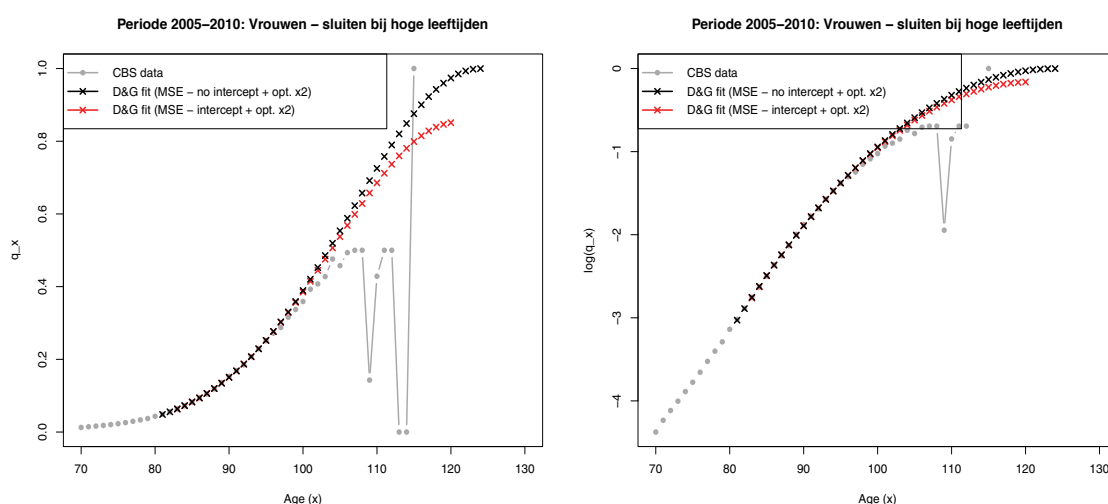


Figure 19: GBM/V 2005-2010: vrouwen, gesloten tafel op basis van aangepaste versie van Denuit and Goderniaux (2005) (met intercept) met optimale  $x_{start}$ ,  $x_{old}$  en  $\omega$ :  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

## 6 Resultaten methode van Lindbergson (2001)

De keuze van de optimale  $x^*$  uit (6) wordt gemotiveerd in Figuur 20 en 21. Hierbij onderzoeken we de keuze van  $x^*$  wanneer uitdrukking (6) gefit wordt op leeftijden vanaf 60 jaar (links), 70 (midden) en 80 (rechts). We stellen vast dat het gebruikte leeftijdsinterval de keuze van  $x^*$  weinig beïnvloedt. Figuur 22 toont de gesloten tafel voor mannen, en Figuur 23 die voor vrouwen.

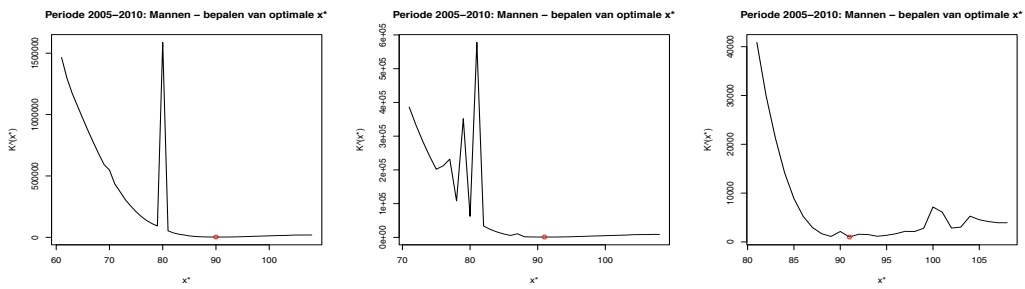


Figure 20: GBM/V 2005-2010: mannen, optimale  $x^*$  bij gebruik van Lindbergson (2001), op basis van leeftijden vanaf 60 jaar (links), 70 jaar (midden) en 80 jaar (rechts).

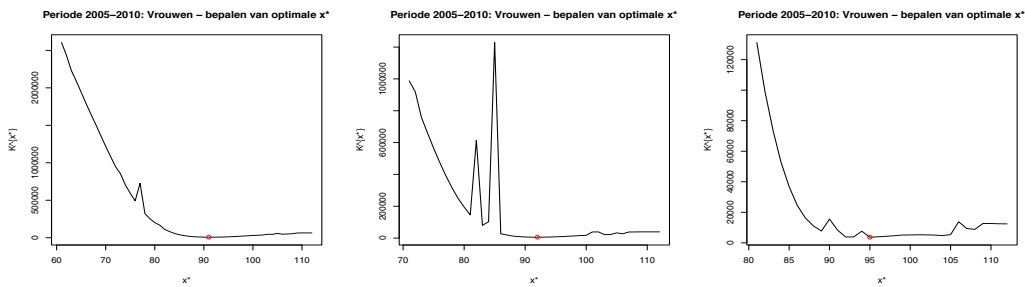


Figure 21: GBM/V 2005-2010: vrouwen, optimale  $x^*$  bij gebruik van Lindbergson (2001), op basis van leeftijden vanaf 60 jaar (links), 70 jaar (midden) en 80 jaar (rechts).

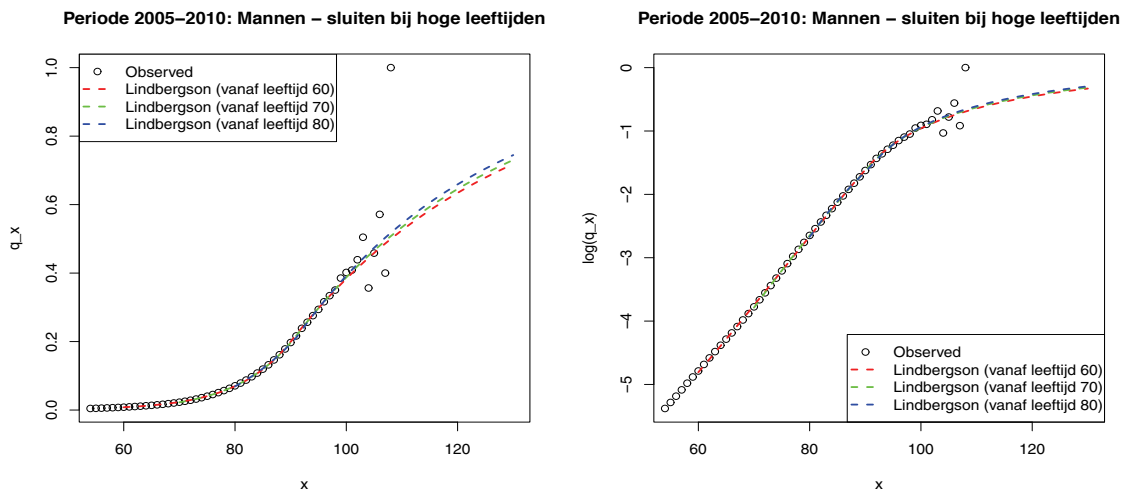


Figure 22: GBM/V 2005-2010: mannen, sluiten van de tafel aan de hand van Lindbergson (2001):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

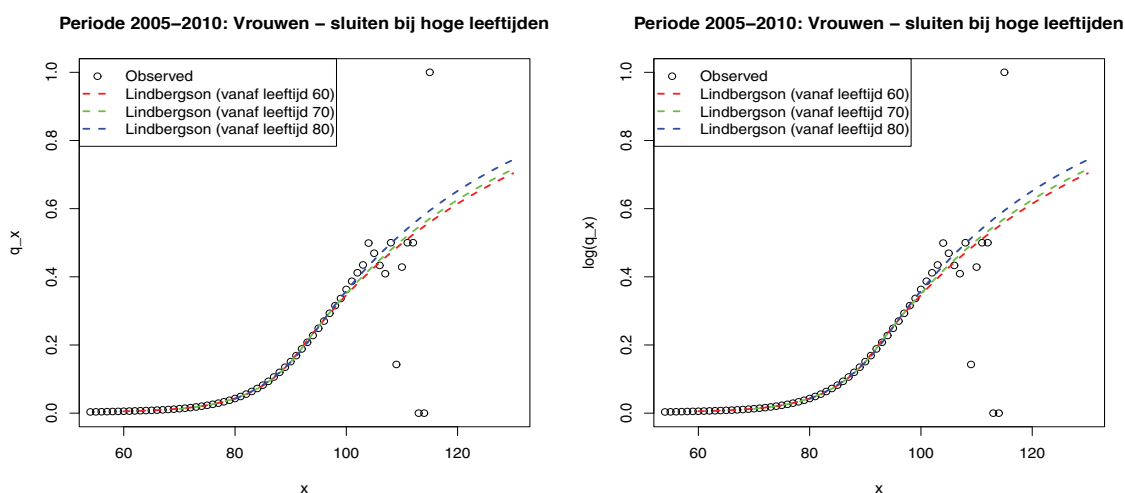


Figure 23: GBM/V 2005-2010: mannen, sluiten van de tafel aan de hand van Lindbergson (2001):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

Table 1: Parameter schattingen bij Lindbergson (2001)

		$x^*$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$
Man	vanaf 60	90	0.00077	$8.375 \times 10^{-6}$	1.1198	0.0262
	vanaf 70	91	-0.00352	$1.5234 \times 10^{-5}$	1.1124	0.0273
	vanaf 80	91	-0.04578	0.000195	1.0833	0.02891
Vrouw	vanaf 60	91	0.00292	$7.1417 \times 10^{-7}$	1.1468	0.0264
	vanaf 70	92	0.00103	$1.1796 \times 10^{-6}$	1.1404	0.02757
	vanaf 80	95	-0.01792	$1.05036 \times 10^{-5}$	1.1144	0.03055

## 7 Resultaten logistische sterftewetten

We bekijken de fit van (10) en (9) op leeftijden vanaf 60, vanaf 70 en vanaf 80 jaar. Figuur 24 en 25 geeft de resultaten aan de hand van (10) voor mannen en vrouwen, respectievelijk. Figuur 26 en 27 geeft de overeenkomstige resultaten voor (9).

Table 2: Parameter schattingen bij Kannistö (1992).

		$\phi_1$	$\phi_2$
Man	vanaf 60	$5.027 \times 10^{-6}$	0.12035
	vanaf 70	$3.5365 \times 10^{-6}$	0.12453
	vanaf 80	$2.54844 \times 10^{-6}$	0.12826
Vrouw	vanaf 60	$1.2059 \times 10^{-6}$	0.13212
	vanaf 70	$5.852 \times 10^{-7}$	0.14043
	vanaf 80	$3.8880 \times 10^{-7}$	0.14503

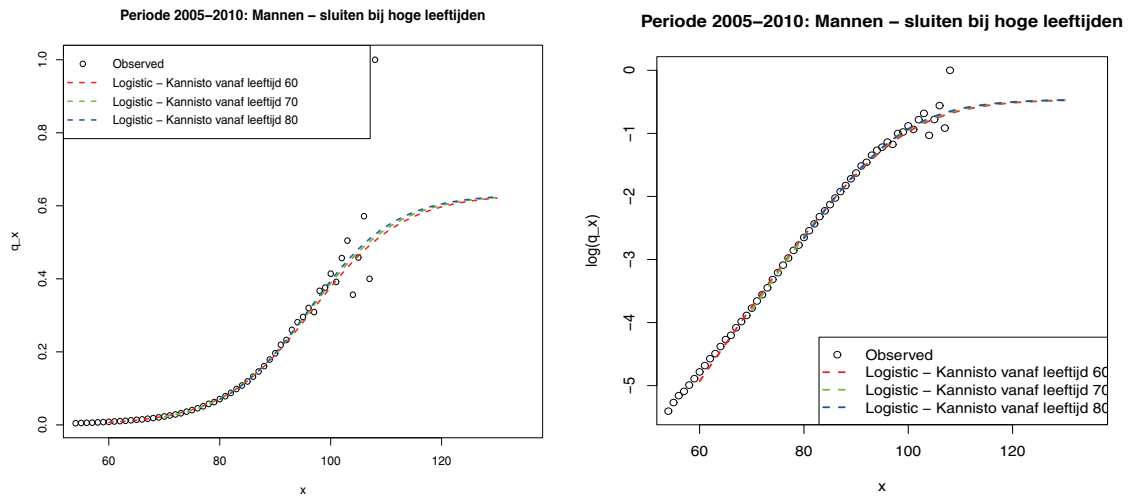


Figure 24: GBM/V 2005-2010: mannen, sluiten van de tafel aan de hand van Kannistö (1992):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

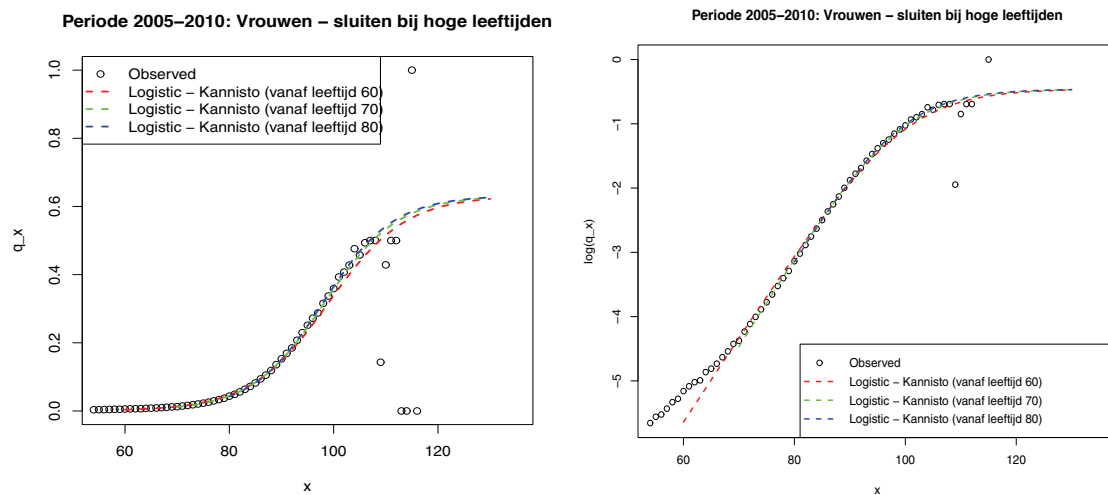


Figure 25: GBM/V 2005-2010: vrouwen, sluiten van de tafel aan de hand van Kannistö (1992):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

## 8 Resultaten Coale and Kisker (1990)

Het sluiten van de tafel volgens Coale and Kisker (1990) is geschetst in Figuur 28 (voor mannen) en 29 (voor vrouwen).



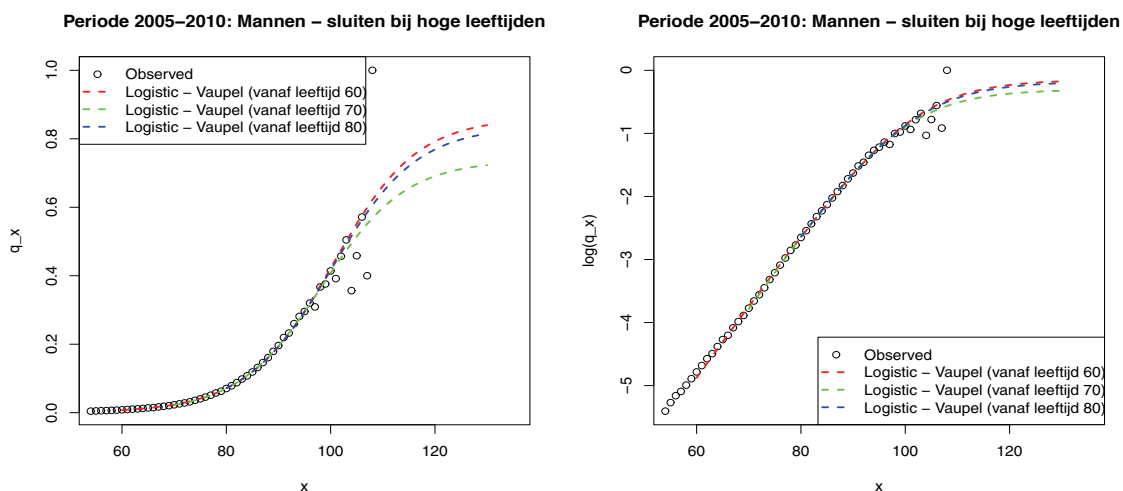


Figure 26: GBM/V 2005-2010: mannen - sluiten van de tafel aan de hand van Vaupel (1990):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

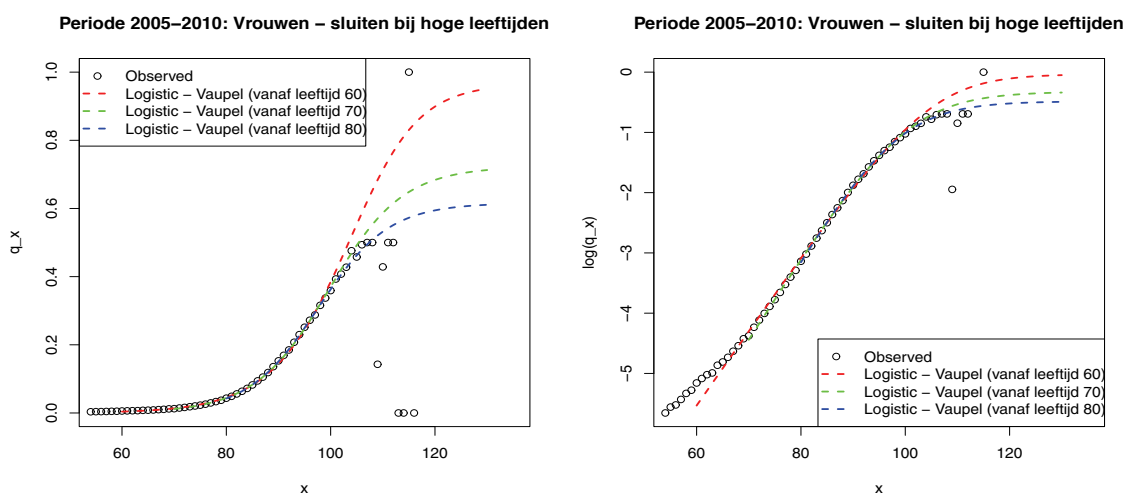


Figure 27: GBM/V 2005-2010: vrouwen - sluiten van de tafel aan de hand van Vaupel (1990):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

## 9 Vergelijkend overzicht

### 9.1 Grafisch

Figuren 30 en 31 vergelijken de diverse methoden om een tafel te sluiten. We stellen vast dat de methode van Coale and Kisker (1990) (in zijn originele specificatie) niet geschikt is om deze periodetafel te sluiten. Denuit and Goderniaux (2005) geeft aanleiding tot  $q_x$  voor hele hoge leeftijden die duidelijk hoger liggen dan de overeenkomstige  $q_x$  zoals bepaald op

Table 3: *Parameter schattingen bij Vaupel (1990).*

		$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
Man	vanaf 60	$3.7362 \times 10^{-6}$	0.11477	$7.4201 \times 10^{-6}$
	vanaf 70	$3.6148 \times 10^{-6}$	0.1203	$4.8368 \times 10^{-6}$
	vanaf 80	$4.253 \times 10^{-6}$	0.1144	$7.7335 \times 10^{-6}$
Vrouw	vanaf 60	$6.314 \times 10^{-7}$	0.1239	$2.1963 \times 10^{-6}$
	vanaf 70	$6.0459 \times 10^{-7}$	0.1368	$7.7631 \times 10^{-7}$
	vanaf 80	$3.6494 \times 10^{-7}$	0.1463	$3.4919 \times 10^{-7}$

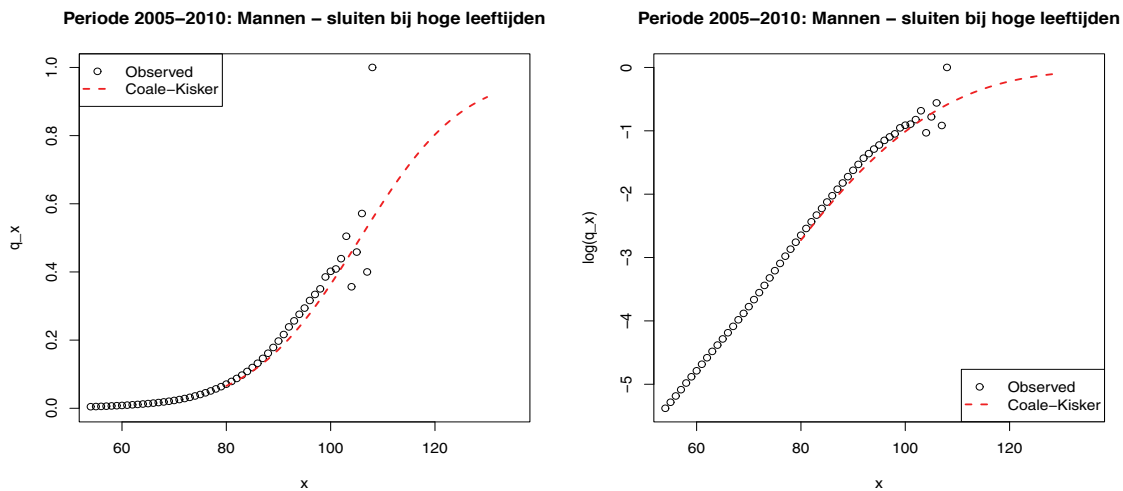


Figure 28: *GBM/V 2005-2010: mannen - sluiten van de tafel aan de hand van Coale and Kisker (1990):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).*

basis van Lindbergson (2001), Kannistö (1992) en Vaupel (1990). We stellen eveneens vast dat de logistische sterftewetten (Kannistö (1992) en Vaupel (1990)) aanleiding geven tot een afvlakking van  $q_x$  op hele hoge leeftijden, terwijl Lindbergson (2001) de  $q_x$  laat toenemen.

## 9.2 Kwantitatief

Om de keuze voor een bepaalde manier van sluiten *kwantitatief* te onderbouwen, hanteren we volgende aanpak:

- de modellen van Denuit and Goderniaux (2005), Denuit and Goderniaux (2005) (aangepast), Lindbergson (2001), Kannistö (1992) en Vaupel (1990) worden geschat op het interval  $[x_1, x_2]$  waarbij  $x_1$  loopt van 70 tot 95 en  $x_2$  vast genomen wordt (voor mannen op leeftijd 106 en voor vrouwen op leeftijd 108)<sup>1</sup>;

<sup>1</sup>De  $q_x$  op hogere leeftijden zijn volgens ons niet betrouwbaar. Verderop onderzoeken we hoe gevoelig de technieken zijn aan dit soort keuzes.

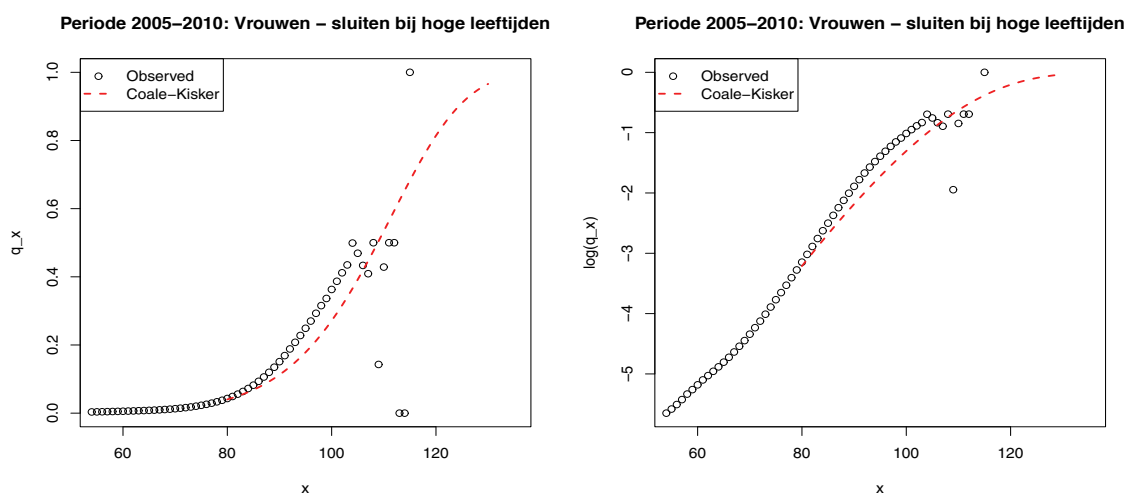


Figure 29: GBM/V 2005-2010: vrouwen - sluiten van de tafel aan de hand van Coale and Kisker (1990):  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

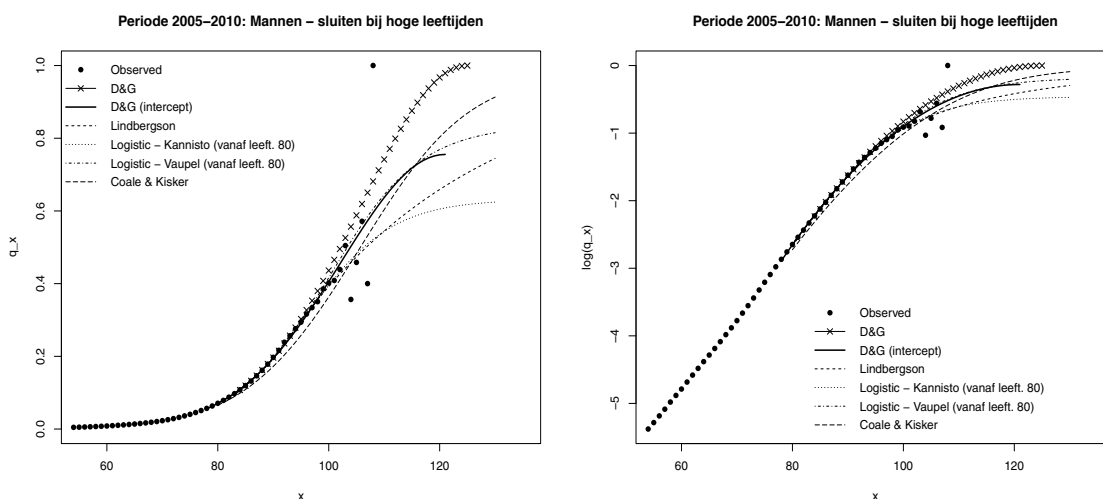


Figure 30: GBM/V 2005-2010: mannen - sluiten van de tafel via diverse technieken:  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

- de parameters in Lindbergson (2001), Kannistö (1992) en Vaupel (1990) worden geoptimaliseerd op basis van criterium (7) (Lindbergson's kleinste kwadraten criterium) en (13) (Binomiale likelijkheid), de parameters bij Denuit and Goderniaux (2005) (origineel en aangepast) worden bepaald via het schatten van een lineair model (al dan niet met intercept) voor  $q_x$ ;<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Voor Denuit and Goderniaux (2005) (origineel en aangepast) zijn we er niet in geslaagd (op een stabiele manier) de parameters uit het model te schatten via het optimaliseren van Lindbergson's kleinste kwadraten

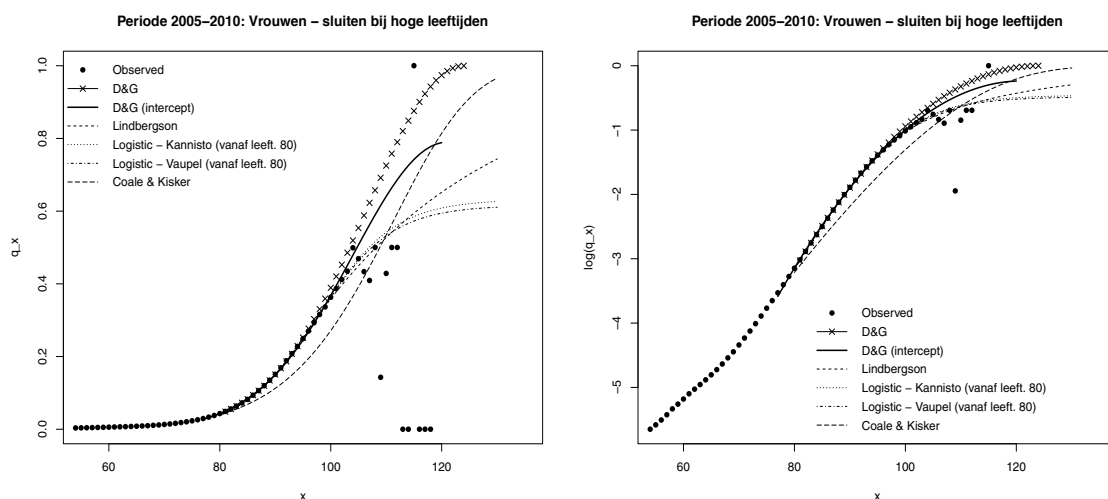


Figure 31: GBM/V 2005-2010: vrouwen - sluiten van de tafel via diverse technieken:  $q_x$  (links) en  $\log(q_x)$  (rechts).

- gebruik makend van de optimale parameterschattingen evalueren we enerzijds het criterium in (7) (Lindbergson's kleinste kwadraten som) en de AIC op basis van het binomiale model in (13);<sup>3</sup>
- we bekijken vervolgens hoe deze goodness-of-fit statistieken variëren over de verschillende modellen. We gebruiken dit om een manier van sluiten te kiezen die goed aansluit bij de geobserveerde data, ook voor hoge leeftijden.

Figuur 32 schetst het verloop van de  $\log(AIC)$  (links) en de logaritme van Lindbergson's kleinste kwadraten criterium (rechts) voor mannen. Sprongen in deze grafiek wijzen erop dat het model niet robuust geschat is (voor de overeenkomstige keuze van  $x_1$ ). Op basis van deze Figuur realiseert het model van Lindbergson (2001) de beste fit op de beschikbare data voor mannen.

Figuur 33 schetst het overeenkomstige verloop voor vrouwen. Op basis van deze Figuur realiseert het model van Kannistö (1992) de beste fit op de beschikbare data voor vrouwen, gevolgd door het model van Lindbergson (2001). Bij Vaupel (1990) duikt enkele keren een instabiele fit op, in het bijzonder bij de maximum likelihood aanpak.

### 9.3 Kwalitatieve selectiecriteria

Voor Lindbergson (2001) en Kannistö (1992) bekijken we in detail de fit van het sterftemodel op diverse intervallen  $[x_1, x_2]$ . Hierbij bekijken we specifiek de robuustheid van de fit. Immers, een robuust model (met betrekking tot keuze  $x_1$  en  $x_2$ ) geniet de voorkeur. Dit is uitgebreid grafisch onderzocht (apart document kan verkregen worden van de auteur). We stellen vast dat Kannistö (1992) erg robuust geschat kan worden, en (heel weinig) gevoelig

criterium of de Binomiale likelihood.

<sup>3</sup> $AIC = -2 \log \hat{L} + 2p$  met  $p$  het aantal parameters in het model.

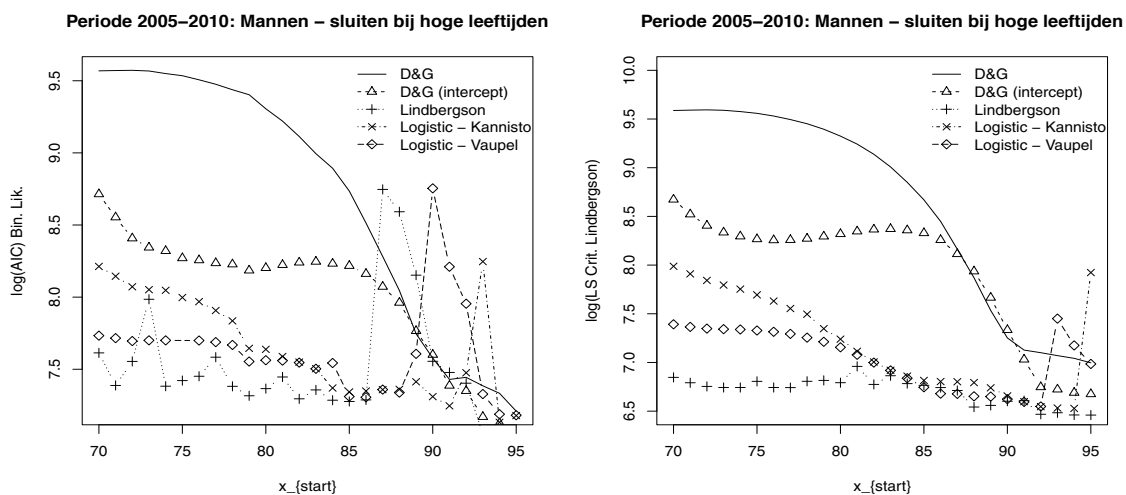


Figure 32: GBM/V 2005-2010: mannen - sluiten van de tafel via diverse technieken: AIC (links) en Lindbergson's kleinste kwadraten criterium (rechts).

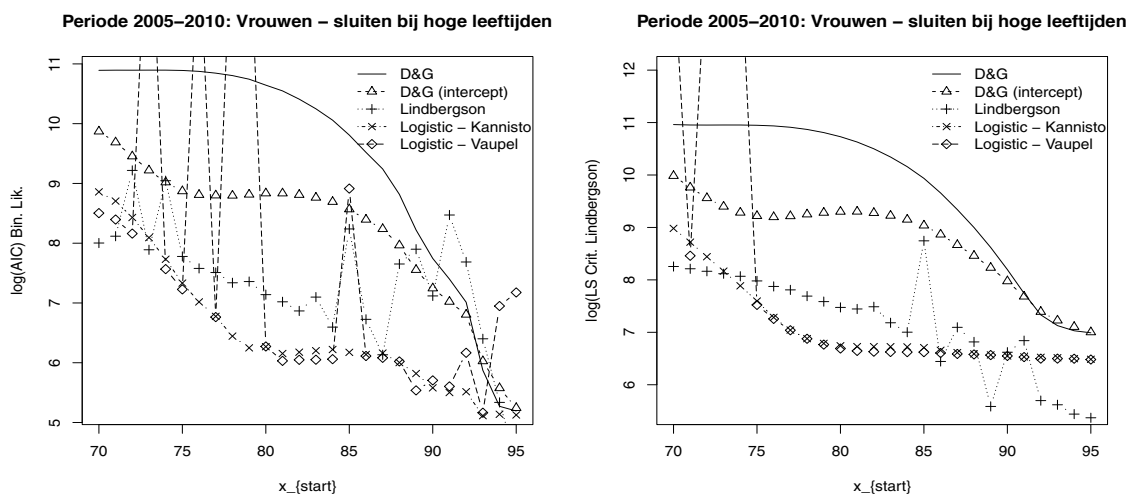


Figure 33: GBM/V 2005-2010: vrouwen - sluiten van de tafel via diverse technieken: AIC (links) en Lindbergson's kleinste kwadraten criterium (rechts).

is aan de keuze van  $x_1$  en  $x_2$ . De drie onderzochte schattingsmethodieken leiden tot vergelijkbare resultaten wat puntschattigen voor de parameters in Kannistö (1992) betreft. <sup>4</sup>

<sup>4</sup>Merk op dat we geen uitspraak doen over bijhorende standaardfouten.

---

## 9.4 Conclusie

Op basis van het onderzoek in deze nota stellen we voor om de periodetafel GBM/V 2005-2010 te sluiten via de **sterftewet van Kannistö (1992)**. Immers, deze techniek is zeer eenvoudig en erg robuust te schatten. Via ons robuustheidsonderzoek hebben we vastgesteld dat de keuze van het interval  $[x_1, x_2]$  waarop de sterftewet geschat wordt, de fit weinig beïnvloedt. Bovendien sluiten de gefitte  $q_x$  volgens Kannistö zeer goed aan bij de waargenomen  $q_x$  (op hoge leeftijden). Op zeer hoge leeftijd, bijv.  $\omega = 120$ , vinden we via Kannistö (1992) resultaten voor  $q_{120}$  die in lijn zijn met demografische expert opinie (met name: 60.6% voor mannen en 60.9% voor vrouwen).

## 10 Periodetafel GBM/V 2005-2010

Gebruik van Kannistö (1992) resulteert in de volgende technische specificaties om de uiteindelijke periodetafel GBM/V 2005-2010 te verkrijgen:

- Stap 1 **Ruwe data CBS**: lees de ruwe data zoals gepubliceerd door het CBS in. De data zijn beschikbaar op hele leeftijden.
- Stap 2 **Smoothen ruwe data**: de ruwe CBS data worden gesmoothed (of: afgerond) gebruik makend van het Van Broekhoven ([VB]) algoritme voor hele leeftijden. De data tot en met leeftijd 94 worden afgerond. Voor leeftijden 0 tem 2 wordt de ruwe CBS sterftekans overgenomen. Voor leeftijden  $x = 3$  tot en met  $x = 5$  wordt VB toegepast waarbij links en rechts van de observatie ( $x - 1$ ) observaties gebruikt worden. Voor leeftijden 6 tot en met 94 wordt VB toegepast met gebruik van 5 observaties links en rechts.
- Stap 3 **Schatten Kannistö (1992)**: schat de sterftewet van Kannistö (1992), zoals gespecificeerd in (10), via OLS op basis van (14). Hierbij worden de  $q_x$  omgezet naar  $\mu_x$  via de transformatie:  $\mu_x = -\log(1 - q_x)$ . De sterftewet wordt geschat op leeftijdsinterval 80 tot en met 94.<sup>5</sup>
- Stap 4 **Sluiten periodetafel GBM/V 2005-2010**: sluit de periodetafel door de kansen  $q_x$  uit Stap 2 te vervangen door  $\hat{q}_{x,Kann}$  =  $1 - \exp(-\hat{\mu}_x)$  vanaf leeftijd 95<sup>6</sup> tot en met leeftijd 120. Hierbij is  $\hat{\mu}_x = \frac{\hat{\phi}_1 \exp(\hat{\phi}_2 x)}{1 + \hat{\phi}_1 \exp(\hat{\phi}_2 x)}$  met  $\hat{\phi}_1$  en  $\hat{\phi}_2$  bepaald in Stap 3.

De resulterende periodetafel is geschetst in Figuur 34 (mannen) en 35 (vrouwen).

## References

A. Coale and E. Kisker. Defects in data on old age mortality in the united states: New procedures for calculating approximately accurate mortality schedules and life tables at the highest ages. *Asian and Pacific Population Forum*, 4:1–31, 1990.

---

<sup>5</sup>Deze keuze is gemotiveerd door het uitgevoerde robuustheidsonderzoek. Vermits Kannistö (1992) zeer robuust geschat kan worden, besteden we geen verdere aandacht aan de keuze van dit interval.

<sup>6</sup>Deze keuze is geïnspireerd door het bestaande AG-AI prognosemodel waarbij leeftijden vanaf 95 als 'zeer hoge leeftijden' specifiek behandeld worden.

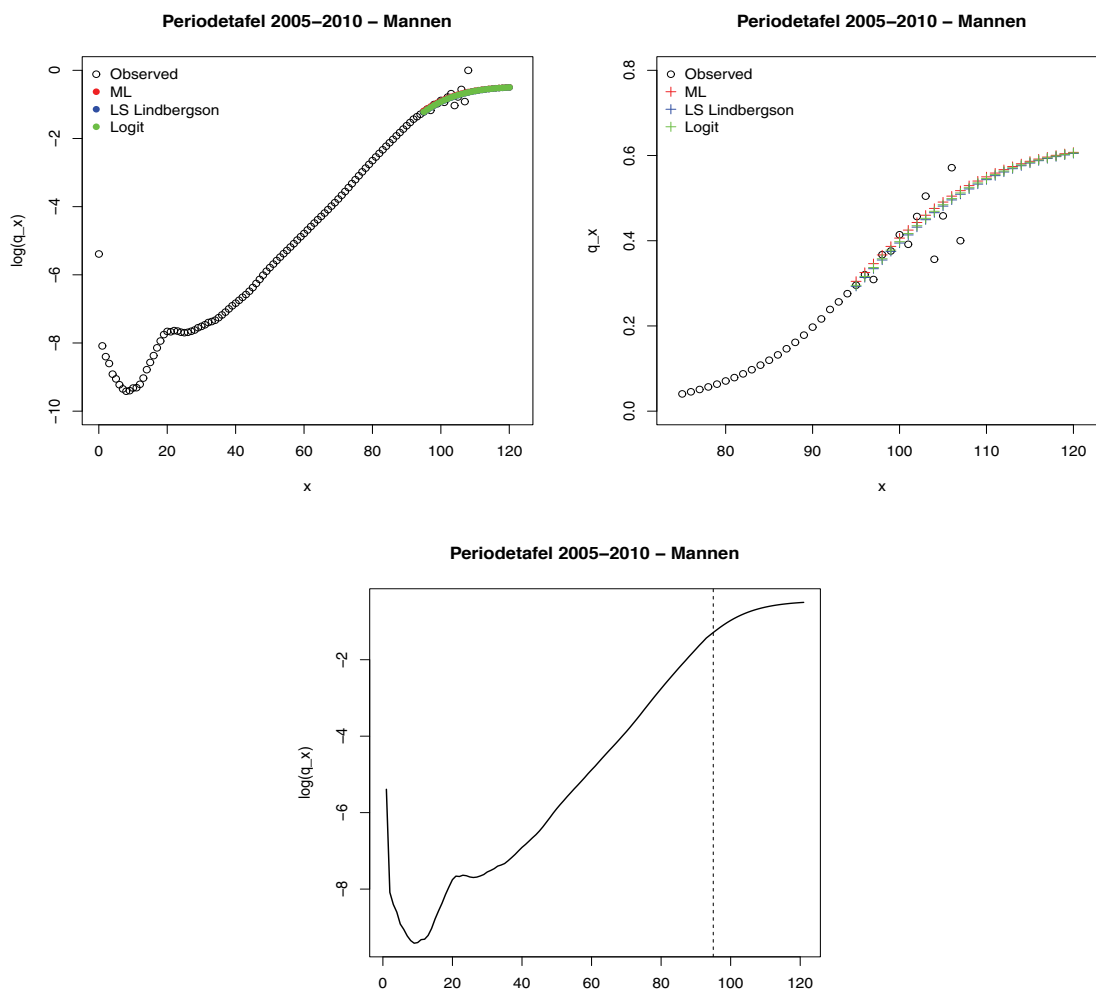


Figure 34: GBM/V 2005-2010: mannen, resulterende periodetafel.

M. Denuit and A.C. Goderniaux. Closing and projecting life tables using log-linear models. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 29-49, 2005.

L.G. Doray. Inference for the logistic-type models for the force of mortality. *Living to 100 and beyond*, SOA Monograph M-LI08-01, page 18p., 2008.

V. Kannistö. *Development of the oldest-old mortality, 1950-1980: evidence from 28 developed countries*. Odense University Press, 1992.

M. Lindbergson. Mortality among the elderly in Sweden 1988-97. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 79-94, 2001.

J.W. Vaupel. Relatives' risks: frailty models of life history data. *Theoretical population biology*, 37:220-234, 1990.



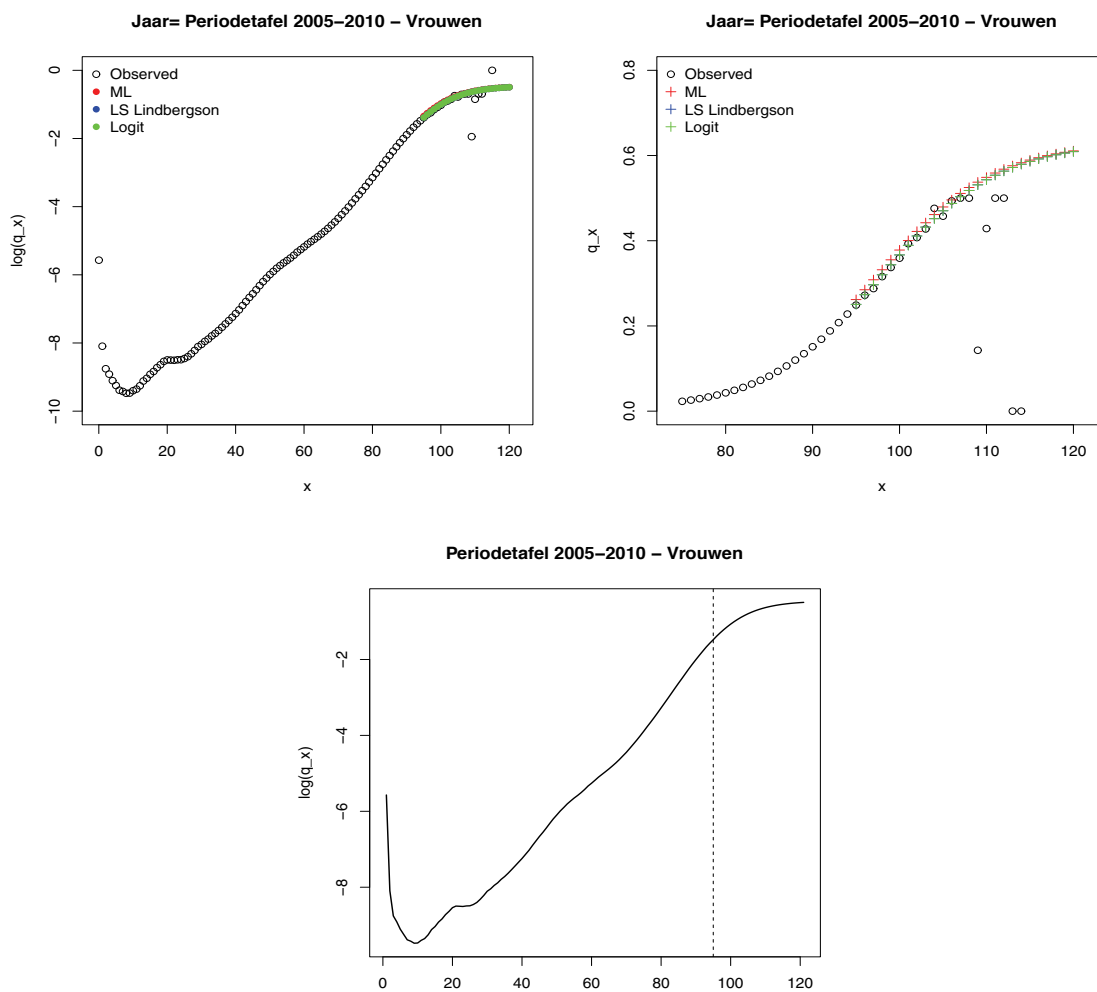


Figure 35: GBM/V 2005-2010: vrouwen, resulterende periodetafel.

F. De Vylder. Maximum de vraisemblance et moindres carrés pondérés dans l'ajustement des tables de mortalité. *Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges*, 70:35-41, 1975.