Prijsvraag

Ben jij ook zo'n actuaris die elk probleem oplost en overal een antwoord op heeft? Dan is de nieuwe rubriek 'De Prijsvraag' echt wat voor jou. In deze rubriek geven we je een opgave die jouw actuariële kennis en kunde op de proef stelt. De vragen zullen gebaseerd zijn op recente opgaven uit onze uitdagende actuariële opleidingen. Er valt natuurlijk ook veel te winnen. De winnaar met de beste uitwerking krijgt onder andere eeuwige roem, een mooi aandenken, en een eervolle vermelding met foto in de eerstvolgende uitgave.

In de eerste editie van de prijsvraag betreden we het domein van Quantitative Finance, wat een actuaris nodig heeft om marktconsistente waardering uit te voeren. We denken mee met pensioenfonds 'Many Options' die de aanschaf van een complexe optie overweegt om haar balans te managen.

Background information:

The pension fund 'Many Options' has a balance sheet with fixed cash flows on the liability side and stock market investments on the asset side. To manage its risk, the fund is interested in equity swaps that have a fixed rate leg and a stock index leg. The fixed rate payments occur yearly at $T_1,\ldots,T_N$ and the swap contract is settled at maturity $T = T_0$. The value of the fixed rate coupons is received at maturity T, given by $R\sum_{i=1}^{N} P(T,T_i)$ with R the yearly fixed rate, while the value of the stock index side is paid at maturity T, given by S_T. Here, $P(t,T_i)$ is the zero coupon bond price with maturity T_i at time t and S_t is the stock index price. The equity swap rate is defined as the fixed rate R_t at time t that results in an equal value of the fixed rate leg and the stock index leg, so that the equity swap value is zero:

$$R_t = \frac{S_t}{\sum_{i=1}^{N} P(t,T_i)} = \frac{S_t}{A_t}.$$

For the annuity, we have introduced the notation $A_t = \sum_{i=1}^{N} P(t,T_i)$.

The pension fund wants to protect itself against stock index values dropping below the annuity value. Therefore, the fund considers buying a put option on the equity swap which has the following payoff structure at maturity T:

$$C_T = A_T \max(K - R_T, 0).$$

Here, the strike K is a positive constant. We consider the following stochastic process for the equity swap rate under the annuity measure with the annuity as numéraire:

$$dR_t = \sigma_R(t) R_t dW_t^A$$

The initial value for R_t is $R_0 = S_0/A_0$ and W_t^A is a standard Brownian motion under the annuity measure. The volatility function is given by:

$$\sigma_R(t) = \alpha e^{-\beta t}.$$

Here, α and β are positive constants.

Price question:

What is the market-consistent value V_0 at $t = 0$ of the equity swap put option with payoff C_t based on the specified equity swap rate process? Specify your answer in terms of S_0, A_0, K, α, β and T.

Hint:

For a lognormally distributed variable X with parameters μ and σ^2, you may use that:

$$\mathbb{E}[\max(K - X, 0)] = KN(-d_2) - \mathrm{E}[X]N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{(\log(\mathbb{E}[X]/K) + \sigma^2/2)}{\sigma} \quad \text{and } d_2 = d_1 - \sigma$$

Mail je oplossing vóór 4 november 2023 naar redactie@actuarieelgenootschap.nl