Prijsvraag

In de vorige Actuaris kwam de prijsvraag van Servaas van Bilsen van de UvA. Zijn vraag betrof een gestileerde twee-perioden wereld waarin inkomen, rente en pensioen voorkomen. In deze wereld moet de besparing geoptimliseerd worden (vraag 1) vervolgens moet voor een totale economie het evenwichtsalaris en kapitaalsinzet worden bepaald (vraag 2) en tot slot moet op basis van de Aaron-condition bezien worden of omslag- of kapitaaldekking het beste resultaat geeft.

De volledige analytische uitwerking is op de website te vinden.

Op deze veelzijdige vraag kwam Pieter Marres met het beste antwoord. Hij gebruikte de Lagrange muliplier om tot de optimale besparing te komen. Bij vraag 2 combineert hij diverse vergelijkingen waarbij hij uiteindelijk de hulp van de uitwerking nodig heeft om het af te ronden.

Een bijzonder fraai kennisgebied van de actuaris is extreme waardentheorie. De actuaris heeft dit kennisgebied nodig om de dikke staarten van verzekeringstechnische verliezen in kaart te brengen, bijvoorbeeld wanneer natuurlijke catastrofes de opstal- en motorportefeuilles teisteren. Het onderwerp is uitdagend, elegant, verrassend en relevant. We verwachten daarom ook dat menig actuaris zich op deze verrassende prijsvraag gaat storten met vele succesvolle inzendingen tot gevolg.

OPGAVE

For simplicity, let us take a sample with a size of 1, that is, we have only one observation X of an insurance loss. Consider the expectation $\mu = E[X]$. We would like to the test the null hypothesis $H_0 : \mu \leq 1000$ (euro) against the alternative H_0: $\mu > 1000$. Take the significance level $\alpha = 0.05$.

Assume first that the loss X is normally distributed with expectation μ and standard deviation $\sigma = 100$. Then we reject H_0, if $X \geq 1000 + 1.645 \cdot 100 = 1164.5$. If the true $\mu = 2000$, then the power of the test is $P_{2000}[X \geq 1164.5] = 1.000$. In words, we reject H_0 if the loss is somewhat higher than 1000 (the boundary of the null hypothesis) and if the true $\mu = 2000$, the power of the test is maximal.

Now let us look at this testing problem again, but with a different probability distribution for X. We assume that X has a Pareto distribution with positive scale parameter β, that is, the distribution function F of X is given by $F(x) = 1 - 1/(1+x)^{\beta}$, when $x \geq 0$. This is a heavy-tailed distribution. We may verify that the expectation $\mu = E[X]$ can be expressed in terms of β (if $\beta > 1$). As before, we reject H_0 if $X \geq c$, for some positive constant c. It is of interest to see for which losses X we would reject H_0 and also if the power is large when $\mu = 2000$.

Questions:

(a) Determine the constant c, when the significance level $\alpha = 0.05$.

(b) Assume that the true $\mu = 2000$. Determine the power of the test, using the value of c from (a).

Mail je oplossing vóór 3 september

naar redactie@actuarieelgenootschap.nl