DOOR ANTOON PELSSER
FOTOGRAFIE DIRK GILLISSEN

ONDER PROFESSOREN

Antoon Pelsser

In deze rubriek wil ik graag het artikel 'Quantifying ambiguity bounds via time-consistent sets of indistinguishable models' bespreken dat ik samen met Anne Balter (Universiteit van Tilburg) recent heb gepubliceerd in het academische tijdschrift *Systems and Control Letters*[1].

Prof. dr. A.A.J. Pelsser Hon FIA is bijzonder hoogleraar Enterprise Risk Management aan de Faculteit Economie en Bedrijfskunde van de Universiteit van Amsterdam (UvA). Hij richt zich op de invloed en gevolgen van model-onzekerheid op Enterprise Risk Management bij verzekeraars en verzekeringsmakelaars. Pelsser is tevens hoogleraar Finance and Actuarial Science aan Maastricht University. Daarnaast is hij partner bij Risk at Work Consulting; fellow bij kennisnetwork Netspar en Honorary Fellow van de Institute and Faculty of Actuaries.

Een belangrijk onderdeel van risicomanagement is tegenwoordig het beoordelen van de impact van model-onzekerheid op de uitkomsten van een risicokapitaal berekening. Een daaraan gerelateerd probleem is het feit dat bij het berekenen van optimaal beleggingsbeleid (zoals bij ALM studies) de uitkomsten van het optimale beleggingsbeleid erg gevoelig kunnen zijn voor de specifieke modelaannames die zijn gemaakt. In beide gevallen gaat het dus om het feit dat modellen verkeerd kunnen zijn en daarom willen we de invloed van een verkeerde specificatie van een model goed in beeld hebben.

Waar actuarissen al goed bekend mee zijn is *parameter onzekerheid*: wat is de invloed van een verkeerde (geschatte) waarde van de parameters in je model? Bijvoorbeeld: wat is de invloed van een verkeerde waarde voor het verwachte rendement op je beleggingen of een foutieve inschatting van de trend in de ontwikkeling van sterfte. Het kwantificeren van de invloed van verkeerde parameters in je model is een belangrijke eerste stap in het analyseren van modelonzekerheid. Wat echter buiten beeld blijft bij de analyse van je modelparameters is de fout die kan ontstaan doordat je het verkeerde model gebruikt, dit noemen we *model onzekerheid*. Idealiter zou je willen kijken naar alle plausibele alternatieve modellen die 'in de buurt liggen' van je best-estimatemodel. In ons paper doen wij een voorstel over hoe je die hele verzameling van plausibele alternatieve modellen zou kunnen specificeren.

HOE STAP JE BUITEN HET BLACK-SCHOLESMODEL?

Om de aanpak die wij voorstellen te illustreren, kijken we naar het volgende voorbeeld. Stel we modelleren de prijs $S(t)$ van een aandeel (of de aandelenindex) met een Black-Scholesmodel: $dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$. In dit model zijn μ en σ de (constante) parameters die het verwachte rendement en de volatiliteit van de aandelen modelleren. We kunnen de invloed bekijken van een andere waarde van de parameters μ en σ op de uitkomsten van onze berekeningen. Dit is de eerder genoemde parameter onzekerheid. Het probleem is dat we voor elke keuze van μ en σ steeds 'binnen' het Black-Scholesmodel blijven en steeds de aandelenkoersen blijven modelleren met een lognormale kansverdeling. Bij het kwantificeren van model onzekerheid, proberen we juist 'buiten' het Black-Scholesmodel te stappen. De vraag is natuurlijk: hoe doe je dat? Een veel gebruikte aanpak is om aan aantal alternatieve modellen (bijvoorbeeld met een *t*-verdeling i.p.v. de normale verdeling) te fitten aan de data en te kijken naar de invloed die een dergelijk alternatief model heeft op de uitkomsten. Het nadeel van een dergelijke aanpak is dat die nogal 'ad hoc' is. Je zou eigenlijk op een systematische manier *alle* alternatieve modellen willen bekijken die ook plausibel zijn en dus 'in de buurt' van je huidige Black-Scholesmodel liggen. De vraag blijft dan nog steeds: hoe doe je dat?

Een veelgebruikte techniek is om alternatieve modellen te specificeren door middel van het veranderen van het Brownian Motionproces $W(t)$. Door het veranderen van de eigenschappen van de 'dW'-term in het Black-Scholesmodel kunnen we een grote klasse van alternatieve modellen in één klap beschrijven. De manier waarop we de eigenschappen van de Brownian Motion veranderen is door het toevoegen van een (stochastische) drift-term aan het model. We vervangen hierbij het 'standaard' Brownian Motionproces $dW(t)$ door een 'alternatief' proces $d\widetilde{W}_\lambda(t) = dW(t) + \lambda(t)dt$. Door gebruik te maken van een stochastische drift-term $\lambda(t)$ kunnen we ook de vorm van de kansverdeling veranderen in het Black-Scholesmodel, om zo 'buiten' de lognormale kansverdeling te treden.

Als u denkt: dat veranderen van de drift in het Black-Scholesmodel komt mij bekend voor, dan heeft u helemaal gelijk! Want dat is precies wat je doet als we van de 'gewone' kansmaat $\mathbb{P}$ naar de risico-neutrale kansmaat $\mathbb{Q}$ gaan in het Black-Scholesmodel. En met de risiconeutrale kansmaat kunnen we de prijzen van opties waarderen. Echter, de risiconeutrale kansmaat in het standaard Black-Scholesmodel wordt bereikt met behulp van een constante waarde λ. De wiskundige machinerie (voor de fijnproevers: Girsanov's Theorema) van het veranderen van kansmaten werkt echter niet alleen met constante λ's, maar werkt evengoed wanneer we een stochastisch proces $\lambda(t)$ gebruiken. Het mooie is dus dat we modelonzekerheid kunnen analyseren met hetzelfde wiskundige gereedschap dat we gebruiken om met behulp van risiconeutrale kansen optiewaarden te berekenen.

We kunnen de eigenschappen van het $\lambda(t)$ proces ook gebruiken om te bepalen of een alternatief model 'in de buurt ligt' van het basismodel: we kunnen kijken naar 'hoe groot' het proces $\lambda(t)$ is. Een veel gebruikte manier om de 'grootte' van $\lambda(t)$ te berekenen is de waarde $\mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)^2\, dt\right]$. Deze waarde is alleen gelijk aan nul als $\lambda(t) \equiv 0$, hetgeen overeenkomt met het basismodel met de 'standaard' Brownian Motion. Een populaire methode in de academische literatuur om de verzameling van alternatieve modellen te beschrijven is om te kijken naar alle stochastische processen $\lambda(t)$ waarvoor $\mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda(t)^2\, dt\right] < k$ onder een gegeven bovengrens k blijft. Dit is wiskundig een cleane specificatie, maar in de praktijk blijft het probleem dan: hoe moeten we die bovengrens k dan vaststellen?

Deze laatste vraag is waar Anne en ik ons over gebogen hebben in ons paper. Het probleem bij het vaststellen van een 'goede' waarde voor de bovengrens k is dat het $\lambda(t)$-proces een abstract wiskundig concept is dat we niet in de praktijk kunnen waarnemen. Dus dat maakt het lastig om een realistische waarde voor de bovengrens k te specificeren. Wat wij doen in het paper, is dat we het abstracte $\lambda(t)$-proces koppelen aan iets dat we wel kunnen berekenen in de praktijk.

DUS DAT MAAKT HET LASTIG OM EEN REALISTISCHE WAARDE VOOR DE BOVENGRENS K TE SPECIFICEREN

Stel dat we op tijdstip T in de toekomst terugkijken naar het daadwerkelijk gerealiseerde pad $\{S(t)\}_{0\le t\le T}$ van de aandelenkoersen. Dan zouden we (binnen het Black-Scholesmodel) kunnen terugrekenen wat het gerealiseerde pad van de Brownian Motion W(t) was. En voor een alternatief model (met $\lambda(t)$-proces) zouden we ook de alternatieve Brownian Motion $\widetilde{W}_\lambda(t)$ kunnen terugrekenen. En dan zouden we een statistische toets kunnen uitvoeren en detecteren of W(t) of het alternatieve model $\widetilde{W}_\lambda(t)$ het meest aannemelijke model was. Maar tijdstip T ligt in de toekomst en we bevinden ons nu op $t = 0$. Dus we weten nu nog niet wat het juiste model zal zijn. Wat we wel kunnen doen op $t = 0$ is voor elke mogelijke specificatie van het stochastische proces $\{\lambda(t)\}_{0\le t\le T}$ berekenen met welke kans we, statistisch gezien, $\lambda(t) \neq 0$ zouden kunnen onderscheiden van het basismodel (d.w.z. $\lambda(t) \equiv 0$) op basis van T jaar aan extra data. Deze 'onderscheidings-kansen' kunnen we op $t = 0$ berekenen als de welbekende kansen op Type I en Type II fouten. Op deze manier kunnen wij de bovengrens k uitdrukken als een functie van de kans α op een Type I fout en de kans β op een Type II fout en de tijdhorizon T. Door gebruik te maken van $\alpha = 5\%$ en $\beta = 20\%$, in combinatie met een keuze voor de tijdhorizon T kunnen we expliciete en realistische waarden voor de bovengrens k vinden. En gewapend met een expliciete waarde voor k kunnen we kijken naar alle plausibele alternatieve modellen die 'in de buurt liggen' van het Black-Scholesmodel waar we in ons voorbeeld mee begonnen.

Ik geef het stokje door aan Katrien Antonio. ■

1 – Het artikel is vrij te downloaden ('Open Access') via de link https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2021.104877