Een alternatief voor nutsfuncties en de impact op de optimale allocatie naar aandelen

De optimale verhouding tussen risicovolle en risicovrije beleggingen hangt alleen af van iemands risicobereidheid, niet van de beleggingshorizon. Dat toonde Robert Merton aan in 1969, onder bepaalde aannames. Die aannames worden nu ook gebruikt om lifecycles te ontwikkelen, en de welvaartswinst van risicodeling te berekenen. Toch denken veel mensen dat de optimale hoeveelheid aandelen toeneemt met de beleggingshorizon, in tegenspraak met Merton. Door risico-aversie op een andere manier te modelleren sluiten de resultaten aan bij deze gedachte, en bij het daadwerkelijke gedrag van mensen.

M. Loois MSc is docent Toegepaste Wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam.

In de berekeningen van Merton staan nutsfuncties centraal. Een nutsfunctie geeft aan hoeveel waarde iemand hecht aan een bepaald consumptieniveau c (bijvoorbeeld een pensioenuitkering). Er zijn veel verschillende nutsfuncties. Ze hebben gemeen dat nut stijgt als de consumptie stijgt, maar een extra euro (meestal) steeds minder extra nut oplevert. Merton gebruikte een aantal aannames voor zijn berekeningen:

1 Het rendement op risicovolle beleggingen (bijvoorbeeld aandelen) is lognormaal verdeeld met een verwacht rendement μ en standaarddeviatie σ. Risicovrije beleggingen leveren jaarlijks een rendement r op.

2 Hij gaat uit van een CRRA (constant relative risk aversion) nutsfunctie (zie kader) met een risico-aversie parameter γ. Hoe hoger γ hoe risicomijdender iemand is, en hoe minder nut een extra euro relatief oplevert.

Op basis van deze aannames is het verwachte nut maximaal als de fractie in risicovolle beleggingen gelijk is aan $\frac{\mu-r}{\gamma*\sigma^2}$. Hoe hoger het verwachte extra rendement, hoe meer iemand volgens de theorie dus belegt in aandelen. Hoe hoger het risico en hoe risico-averser iemand is, hoe minder hij in aandelen belegt.

> De CRRA-nutsfunctie kent aan elke mogelijke consumptie *c* een nut *U*(*c*) toe:
>
> $$U(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, & \gamma \geq 0,\ \gamma \neq 1 \\ \ln(c), & \gamma = 1 \end{cases}$$
>
> Als de consumptie onzeker is, bijvoorbeeld omdat een deel in aandelen wordt belegd, kun je het verwachte nut berekenen (en vervolgens maximaliseren):
>
> *verwacht nut*: $\int_0^\infty U(c)dc$

Stel ik heb een mooi geldbedrag gekregen, en ik wil een deel opzij zetten voor m'n vakantie van volgende week en een deel voor de eventuele studie van m'n zoontje over 18 jaar. Volgens de theorie van Merton moet ik in beide gevallen dezelfde beleggingsmix kiezen, want de optimale fractie aandelen is onafhankelijk van de beleggingshorizon. Dat komt niet overeen met het gedrag en de intuïtie van de meeste mensen. Op de korte termijn weegt dat kleine beetje verwacht rendement op aandelen, voor mij in ieder geval, niet op tegen de kans dat de markt volgende week instort. Op de langere termijn gaat het verschil wel aantikken. Wiskundig gezegd, het verwachte rendement groeit evenredig met de tijd. De standaarddeviatie van het rendement (het risico) groeit met de wortel van de tijd. Er komt dus een moment dat zelfs het 5% slechtste percentiel (of nog extremer) van de aandelenrendementen boven het risicovrije rendement ligt. Volgens Merton is echter niet de standaarddeviatie maar de variantie van de rendementen van belang. En die groeit ook evenredig met de tijd.

Om te begrijpen waar dit resultaat vandaan komt kijken we iets verder naar de CRRA nutsfunctie. De crux zit 'm in het woordje relatief. De nutsfunctie kijkt niet naar de absolute hoogte van de consumptie, maar naar relatieve verschillen. Aan de ene kant is dat een mooie eigenschap van deze nutsfunctie. De uitkomsten van een analyse veranderen niet als uitkeringen ineens berekend worden in eurocenten of dollars in plaats van euro's. Aan de andere kant hebben we toch wel degelijk een soort absoluut ijkpunt. Het zal mij eerlijk gezegd de spreekwoordelijke worst wezen of ik 2 euro of 2 eurocent pensioen krijg per jaar. In beide gevallen kan ik er niks mee. Maar het verschil tussen 2 euro of 200 euro in de maand maakt me wel uit. Vanwege deze eigenschap tellen de slechtere uitkomsten erg zwaar. Dit is ook te zien in figuur 1. Zo zwaar dat zelfs als het 0,1% percentiel van aandelen boven het risicovrije rendement ligt, de nog slechtere uitkomsten ervoor zorgen dat iemand nog steeds gedeeltelijk risico wil vermijden.

Laten we het volgende alternatief bekijken voor de theorie van Merton. Niet de consumptie krijgt een nutswaarde toegekend, maar de zekerheid waarmee je op die consumptie kunt rekenen. Laten we dit de methode van de aangepaste kansen noemen. Stel iemand gooit met een dobbelsteen. Bij even krijgt hij niks, bij oneven krijgt hij 2 euro. Hij heeft dus 50% kans op 2 euro. De verwachtingswaarde van dit spelletje is 1 euro. Wat nu als we die kans van 0,5 wat naar beneden bijstellen, bijvoorbeeld door de kans te kwadrateren? We zouden kunnen zeggen dat deze mogelijke uitkomsten iemand $0{,}5^2 \cdot 2 = 0{,}50$ euro waard is. Een stapje verder. Stel iemand gooit met een dobbelsteen en krijgt het aantal ogen in euro's uitbetaald. Het is snel duidelijk dat je dan niet de afzonderlijke kansen kunt kwadrateren. Dan zou dit spelletje met $\frac{1}{6^2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 0{,}583$ waard zijn. Maar in dit spelletje ben je verzekerd van minimaal één euro. Als we hier even over nadenken wordt duidelijk dat we moeten kijken naar cumulatieve kansen. Je krijgt met 100% zekerheid minimaal 1 euro. Met 5/6 kans krijg je minimaal 2 euro, dus 1 euro extra. Met kans 4/6 minimaal 4 euro, met kans 1/6 6 euro. We gaan nu de cumulatieve kansen wat bijstellen, weer door ze te kwadrateren. We kunnen dan de waarde van dit spelletje bepalen als

$$1 + \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \cdot (2-1) + \cdots \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot (6-5) = 2{,}53.$$

Dit kunnen we als volgt opschrijven:

Stel de mogelijke uitkomsten zijn $0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ met bijbehorende kans $p_1,\ldots,p_n$, $(\sum p_i = 1)$.

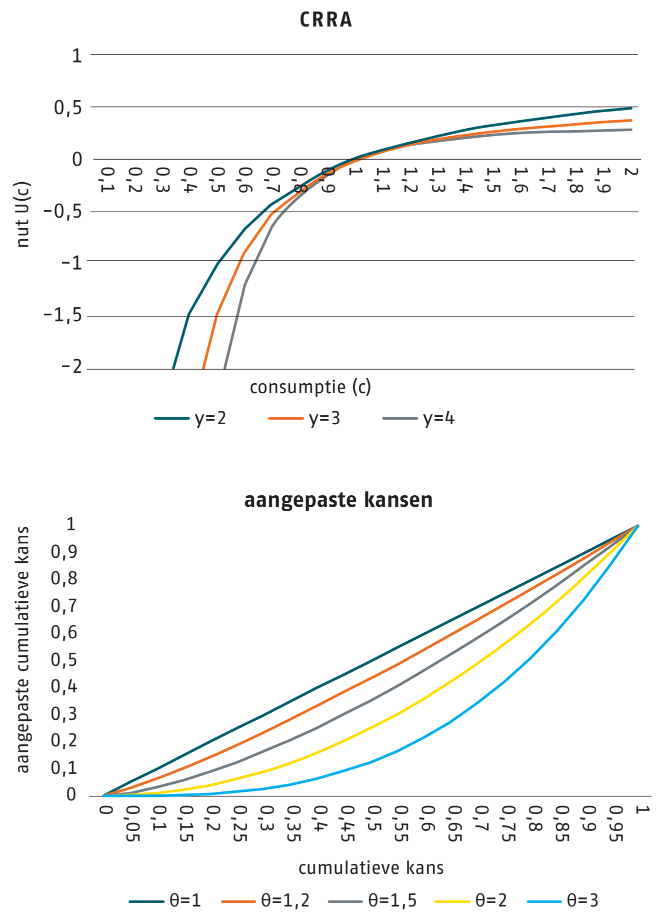
We definiëren het nut als

$$U(c) = c_1 + (1-p_1)^\theta (c_2-c_1) + (1-p_1-p_2)^\theta \cdot (c_3-c_2) + \cdots p_n^\theta \cdot (c_n-c_{n-1})$$

In het continue geval wordt dit:

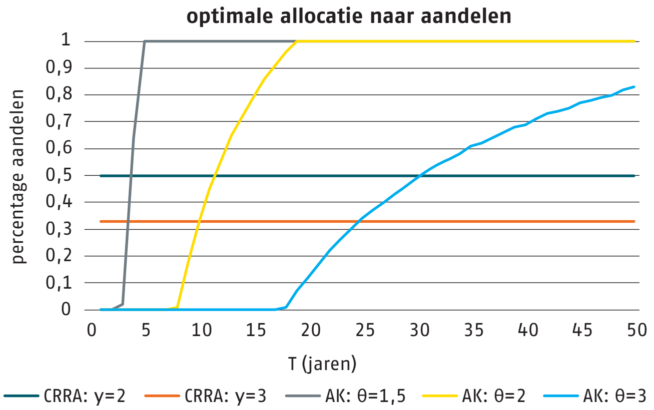
$$U(c) = \int_0^\infty (1-F(c))^\theta \, dc$$

In de voorbeelden hierboven was θ gelijk aan 2. Hoe hoger θ hoe minder waarde iemand hecht aan de onzekere uitkomsten (zie ook figuur 1). En dus, hoe risico-averser hij is en hoe minder hij in aandelen zal beleggen.



Figuur 1: De CRRA nutsfunctie (boven) en de methode van de aangepaste kansen (onder). Boven zien we dat nut erg hard daalt als de consumptie daalt, en slechte uitkomsten het gemiddelde nut dus erg naar beneden trekken. Onder zien we hoe de waarde van een onzekere uitkomst (cumulatieve kans kleiner dan 1) naar beneden wordt bijgesteld/aangepast.

Laten we dit toepassen op de situatie van Merton, waarbij we de optimale mix willen bepalen tussen een risicovrije belegging en aandelen met lognormaal verdeelde rendementen. Dit is gedaan met simulaties. Verschillende mixen zijn doorgerekend, van 0% tot en met 100% aandelen. Bij 100 scenario's krijgt de laagste uitkomst een cumulatieve kans van 99,5% toegekend, de een na laagste 98,5%, de hoogste 0,5%. Vervolgens kijken we welke mix het hoogste nut oplevert. Dit vergelijken we met de optimale allocatie naar aandelen volgens Merton, ook op basis van simulaties, maar eenvoudig te berekenen. We krijgen dan het resultaat dat te zien is in figuur 2:



Figuur 2: Optimale allocatie naar aandelen op basis van CRRA nutfunctie en de methode van de aangepaste kansen (AK) voor verschillende waardes van de risico-aversieparameters. μ=8%, r=4%, σ=20%.

Als we risicovolle uitkomsten op deze manier waarderen neemt de allocatie naar aandelen wel toe in de tijd! Dit sluit beter aan bij onze intuïtie. Tot een bepaalde beleggingshorizon, bijvoorbeeld 8 jaar, belegt iemand volledig risicovrij. Hoe hoger θ hoe langer iemand risicovrij belegt. Dan stijgt de allocatie naar aandelen, eerst wat sneller en dan wat minder snel, naar 100%. In deze berekeningen zijn we er vanuit gegaan dat iemand niet meer dan 100% in aandelen kan beleggen (geen leverage). Hoe lager θ, hoe eerder het punt waarop iemand volledig in aandelen belegt.

Deze methode, het aanpassen van kansen, heeft wat weg van de Cumulative prospect theory van Daniel Kahneman (bekend van zijn boek ‘Ons feilbare denken’). Toch zitten er een aantal fundamentele verschillen tussen zijn methode en de hier gepresenteerde methode. De theorie van Kahneman kijkt onder andere meer naar hoe mensen winst en verlies waarderen, bijvoorbeeld in een loterij. In zijn theorie worden bepaalde uitkomsten overwogen en andere onderwogen. Hier is een risicovolle uitkomst per definitie minder waard dan een zekere uitkomst.

Opvallend is dat het gevonden patroon sterk lijkt op lifecycles in DC-regelingen. Jongeren, met een lange beleggingshorizon, beleggen veel in aandelen. Hoe ouder iemand wordt, en dus hoe korter de periode tot de ingang van zijn pensioen, hoe minder risico er wordt genomen. De theoretische onderbouwing is echter totaal anders. Lifecycles zijn wel degelijk gebaseerd op de ‘wetten’ van Merton. Echter, de contante waarde van toekomstige premies wordt meegenomen als risicovrij ‘human capital’. Om op dezelfde allocatie naar aandelen uit te komen beleggen jongeren, met veel risicovrij human capital en een klein pensioenvermogen, meer in aandelen dan ouderen met veel pensioenvermogen en weinig human capital.

Een technisch voordeel van de methode van aangepaste kansen is dat het berekende nut gelijk ook het welvaartsequivalent is. Ook is de uitkomst niet gevoelig voor relatieve veranderingen (net zoals de CRRA), maar ook niet voor absolute verschuivingen (wat de CRRA wel is). Deze methode is ook toepasbaar in andere situaties. Bijvoorbeeld als alternatieve methode voor het berekenen van het effect van de overstap op een nieuw pensioencontract. Hier wordt onder andere vaak gekeken naar netto profijt en welvaartswinst. De welvaartswinst wordt vaak berekend aan de hand van de CRRA nutsfunctie. Als de methode van de aangepaste kansen wordt gebruikt zullen de kortetermijnrisico’s relatief wat zwaarder wegen en de langetermijnrisico’s relatief wat minder zwaar. De resultaten sluiten ook beter aan bij de veelgebruikte figuren met percentielen van onder andere dekkingsgraden en vervangingsratio’s.

Wat kunnen we nu concluderen? De uitkomst van Merton, een vaste optimale allocatie naar aandelen, onafhankelijk van de beleggingshorizon, wordt vaak gezien als een soort natuurwet. Wellicht omdat die gebaseerd is op ingewikkelde analyses die lastig te doorgronden zijn. Daardoor vergeten we misschien dat die uitkomst volgt uit de aannames die gedaan worden. We modelleren hier voorkeuren van mensen, niet vaststaande natuurverschijnselen zoals het vervalgedrag van een radioactief deeltje. Andere aannames over onze voorkeuren leiden weer tot andere resultaten, die wellicht beter aansluiten bij de daadwerkelijke voorkeuren van mensen. ■